МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИСиС»

НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра математики и естествознания

С.М. Ожегова

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Практические занятия по физике
Часть 1

Учебно-методическое пособие

Новотроицк, 2013

УДК 53
ББК 22.3
О- 45

Рецензенты:

Соколов А.А., *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин СамГУПС (филиал г. Орска)*

Швалёва А.В., *кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и естествознания НФ МИСиС*

Ожегова С.М. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: практические занятия по физике / Ожегова С.М. Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС» – 2013. – 112 с.

Данное учебно-методическое пособие к практическим занятиям по физике составлено в соответствии с программой курса «Физика. Часть 1» для студентов технических направлений, но может быть использовано студентами и других направлений очной и заочной формы обучения.

В пособии приведены основные понятия, формулы и уравнения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и домашние задания.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

© Новотроицкий филиал ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС", 2013
© Ожегова С.М. , 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Систематическое решение задач – необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти формулы, прививает навыки практического применения теоретических знаний.

Решения задач требует знания физических законов. Поэтому, прежде чем приступить к решению задач, необходимо изучить соответствующие темы курса физики по рекомендуемым учебным пособиям.

Настоящие методическое пособие имеет целью углубить понимание физических законов и явлений, пояснить применение некоторых методов решения задач.

Методическое пособие к практическим занятиям по физике составлено в соответствии с программой курса физики и содержит разработки восьми занятий по решению задач. К каждому практическому занятию приведены: основные понятия, формулы и уравнения; вопросы для проверки уровня подготовки к практическому занятию; примеры решения задач; задачи для самостоятельного решения; домашние задания.

Теоретический материал позволяет в пределах каждой темы обойтись без привлечения дополнительных учебных пособий.

Приведенные примеры решения задач показывают многообразие способов разрешения различных заданий по данной теме; позволяют выявить основные физические процессы, имеющие место в данном случае; выяснить, каким физическим законам подчиняются эти процессы.

Задачи для самостоятельного решения составлены в достаточном количестве с целью использования их как для индивидуального, так и для коллективного решения.

Домашние задания подобраны с расчетом на выполнение их студентами по пяти вариантам. Предлагаемые методические указания предназначены для студентов дневного и заочного отделений вуза.

Общие методические указания к решению задач

При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

1. Прочитать условие задачи. Выписать все величины, входящие в условие, столбиком и выразить их в единицах Международной системы единиц СИ.

2. Осмыслить физическую сущность задачи, представить ее наглядно в виде четкого рисунка, на котором, хотя бы условно, указать все параметры, характеризующие явления, на основе которых построено условие задачи.

3. Указать основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи, разъяснить буквенные обозначения, употребляемые при написании формул. Векторные величины внести на чертеж. Если при решения задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-либо физический закон или не являющаяся определением какой-либо физической величины, то ее следует вывести.

4. Решить задачу сначала в общем виде, то есть в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи и взятых из таблиц.

5. Подставив в рабочую формулу размерности, убедиться в правильности размерности искомой величины.

6. Подставить в конечную формулу числовые значении. При вычислениях соблюдать правила приближенных вычислений и округлений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Кинематика поступательного и вращательного движения

1.1 Основные вопросы теории

Поступательное движение – это движение, при котором все точки тела двигаются одинаково.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой , называемой осью вращения.

Поступательное движение. Способы задания положения тела в пространстве. Положение точки в пространстве обычно описывают при помощи радиус-вектора или уравнение движения этой точки записывают в координатной (скалярной) форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \ \textbf{уравнение движения}$$

Радиус-вектор – это направленный отрезок, соединяющий начало координат с положением точки в пространстве, проекции которого на соответствующей оси равны координатам точки.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Перемещение – направленный отрезок, соединяющий начальное положение точки с последующим.

$$\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$|\vec{s}| = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Скорость материальной точки. Два различных движения для которых одно и тоже перемещение $\Delta\vec{r}$ совершилось за разные промежутки времени, характеризуются разной быстротой изменения положения точки, т.е. **средней скоростью:**

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость – это векторная величина, равна первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени

Физический смысл $\vec{v}$: показывает какое перемещение совершает тело за единицу времени.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}$$

Направление скорости: по касательной к траектории $\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{r}$.

$[v] = м/с$.

Ускорение материальной точки. В реальных условиях тела редко движутся с постоянной скоростью.

Быстрота изменения скорости будет характеризоваться **средним ускорением:**

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение – это физическая величина, равная первой производной скорости по времени.

Физический смысл $\vec{a}$: показывает как изменяется скорость за единицу времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt})^2 + (\frac{d^2y}{dt})^2 + (\frac{d^2z}{dt})^2}$$

Направление ускорения совпадает с направлением $d\vec{v}$: $a \uparrow\uparrow d\vec{v}$

$[a] = м/с^2$.

Частные случаи поступательного движения материальной точки.

I. Равномерное прямолинейное движение

Движение называется п**рямолинейным**, если траектория движения – прямая линия.

Движение называется **равномерным**, если вектор скорости есть величина постоянная.

$$\vec{v} = const \Rightarrow \begin{cases} 1. v = const \\ 2. \textit{напраление} \quad \vec{v} \quad \textit{не} \quad \textit{изменяется} \end{cases}$$

Воспользуемся определением мгновенной скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Проинтегрируем обе части данного выражения:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt$$

После интегрирования получим:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

II. Равноускоренное прямолинейное движение

Движение называется **равноускоренным**, если вектор ускорения есть величина постоянная.

$$\vec{a} = const \Rightarrow \begin{cases} 1. a = const \\ 2. \textit{напраление} \quad \vec{a} \quad \textit{не} \quad \textit{изменяется} \end{cases}$$

Воспользуемся определением мгновенного ускорения :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}dt$$

Проинтегрируем обе части данного выражения:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt$$

После интегрирования получим :

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Воспользуемся определением мгновенной скорости :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Проинтегрируем обе части данного выражения:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt$$

После интегрирования получим:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ z = z_0 + v_{0z}t + \dfrac{a_z t^2}{2} \end{cases}$$

III. Поступательное движение точки по дуге окружности

Движение называется **криволинейным**, если траектория движения - непрямая линия.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости может меняться и по величине и по направлению. Направление $\vec{v}$ совпадает с касательной к траектории.

Полное ускорение определяется по формуле

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

где: a_τ - тангенциальное ускорение, характеризует изменение скорости по модулю за единицу времени и направлено по касательной к траектории.

a_n - нормальное ускорение, характеризует изменение скорости по направлению за единицу времени, направлено перпендикулярно вектору скорости к центру окружности О.

Модуль ускорения определяется формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Модуль тангенциального ускорения определяется по формуле:

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$

Модуль нормального ускорения определяется по формуле:

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

Вращательное движение материальной точки. Для описания вращения удобно ввести **угловое смещение** φ - это физическая величина равная углу поворота радиус-вектора движущейся точки относительно начального положения.

Или говорят: положение точки на окружности можно задать углом поворота.

$\boxed{\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)}$ – **закон движения**

Направление угла φ - определяется по правилу буравчика (правого винта : если направление вращательного движения винта совпадает с вращением точки, то его поступательное движение совпадает с направлением углового смещения. Единицы измерения углового смещения

$$[\varphi] = рад$$

Для характеристики вращательного движения вводит среднюю угловую скорость:

$$\vec{\omega}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Угловая скорость – это физическая величина равная первой производной угла поворота по времени

Физический смысл ω: характеризует быстроту изменения угла поворота.

Направление: $\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ – псевдовектор).

Точка приложения векторов $d\vec{\varphi}$; $\vec{\omega}$ произвольна, но удобно (хотя и необязательно) совместить этот вектор с осью вращения.

$[\omega] = \frac{рад}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1}$.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует **среднее угловое ускорение**:

$$\vec{\varepsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Угловое ускорение – это физическая величина, равная первой производной угловой скорости по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Физический смысл: угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в единицу времени.

Направление $\vec{\varepsilon}: \Delta\omega > 0$ То есть $\omega_2 > \omega_1$, то $\vec{\varepsilon} > 0$

$\Delta\omega < 0$ то есть $\omega_2 < \omega_1$, то $\vec{\varepsilon} < 0$

$$[\varepsilon] = \frac{рад}{c^2} = \frac{1}{c^2} = c^{-2}$$

Связь между угловыми и линейными параметрами. По определению:

$$\omega = \frac{v}{R}, \text{ тогда } \quad v = \omega \cdot R$$

Подставим последнее выражение в формулы вычисления нормального и тангенциального и полного ускорений:

1. $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$

2. $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(\omega R)}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} R\varepsilon$

3. $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + R^2\varepsilon^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$

Вопросы для проверки знаний:

1. Дайте определение радиус-вектора. Сделайте пояснительный рисунок.

2. Что называется траекторией движения, пройденным путем, перемещением?

3. Укажите способы задания положения тела в пространстве, напишите уравнения движения.

4. Сформулируйте определение линейной скорости ,запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

5. Сформулируйте определение линейного ускорения ,запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

6. Сформулируйте определение нормального ускорения, запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

7. Сформулируйте определение тангенциального ускорений ,запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

8. Сформулируйте определение угловой скорости , запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

9. Сформулируйте определение углового ускорения ,запишите формулу, укажите физический смысл величины, направление и единицы измерения.

10. Запишите формулы связывающие линейные и угловые величины.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1.1:

Радиус–вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}, \vec{j}$ – орты осей ***x, y***. Определите для момента времени **t**=1**с**: 1) модуль скорости, 2) модуль ускорения.

Дано: $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$; t = 1 с

Найти: υ– ?; a– ?

Решение:

1. Вектор скорости найдем по формуле:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = (t^3\,\vec{i} + 3\,t^2\vec{j})' = 3\,t^2\,\vec{i} + 6\,t\,\vec{j} \qquad (1.1.1)$$

Сравнивая (1.1) и $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}$, находим: $\upsilon_x = 3\,t^2 \quad \upsilon_y = 6\,t$

Модуль скорости найдем по формуле:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}, \qquad \upsilon = \sqrt{(3\,t^2)^2 + (6\,t)^2}$$

Найдем значение скорости:

$$\upsilon = \sqrt{(3\cdot 1^2)^2 + (6\cdot 1)^2} = 6{,}7\ м/с$$

2.Вектор ускорения найдем по формуле:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{\upsilon}}{d\,t} = (3\,t^2\vec{i} + 6\,t\,\vec{j})' = 6\,t\,\vec{i} + 6\vec{j} \qquad (1.1.2)$$

Сравнивая (1.2) и $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, находим $a_x = 6\,t; \quad a_y = 6$

3. Модуль ускорения найдем по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6\,t)^2 + 6^2}$$

Найдем значение ускорения: $a = \sqrt{(6\cdot 1)^2 + 6^2} = 8{,}48\ м/с^2$

Ответ: υ=6,7м/с; a=8,48м/с^2.

Пример 1.2:

Уравнение движения материальной точки задано уравнением $x = 4t^3 + 2t + 1$. Найти мгновенные скорость и ускорение в конце второй секунды движения, среднюю скорость и среднее ускорение за 2 с.

Дано: $x = 4t^3 + 2t + 1$; t=2 с

Найти: υ (2)–?; a (2)–?; $a_{ср}$; $\upsilon_{ср}$

Решение:

1. Мгновенную скорость находим как первую производную от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 12t^2 + 2$$

Найдем значение скорости для t=2с: $\upsilon(2) = 12 \cdot 2^2 + 2 = 50\ м/с$

2. Мгновенное ускорение находим как первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 24t$$

Найдем значение ускорения для t=2с: $a(2) = 24 \cdot 2 = 48\ м/с^2$

3. Для определения средней скорости воспользуемся формулой:

$$\upsilon_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$x_1 = x(0) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1\ м$$

$$x_2 = x(2) = 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 + 1 = 37\ м$$

Найдем значение средней скорости: $\upsilon_{ср} = \frac{37 - 1}{2 - 0} = 18\ м/с.$

4.Для определения среднего ускорения воспользуемся формулой:

$$a_{ср} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}$$

$$\upsilon_1 = \upsilon(0) = 12 \cdot 0 + 2 = 2\ м/с$$

$$\upsilon_2 = \upsilon(2) = 50\ м/с$$

Найдем значение среднего ускорения: $a_{ср} = \frac{50 - 2}{2 - 0} = 24\ м/с^2$

Ответ: 50м/с; 48м/с^2; 24м/с^2; 18м/с.

Пример 1.3:

Движение точки по окружности радиусом R=3м задано уравнением $\xi = 0{,}4\,t^2 + 0{,}1\,t$ Определите для момента времени t=1 с после начала движения нормальное, тангенциальное и полное ускорения.

Дано: $\xi = 0{,}4\,t^2 + 0{,}1\,t$; t=1 с; R=3 м.

Найти: a_τ; a_n; a.

Решение:

1.Тангенциальное ускорение находим по формуле:

$$a = \frac{d\,\upsilon}{d\,t} \tag{1.3.1}$$

где **υ** – линейная скорость, есть первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{d\,\xi}{d\,t} = 0{,}8\,t + 0{,}1$$

Тогда $a_\tau = 0{,}8\ м/c^2$

2.Нормальное ускорение находим по формуле:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(0{,}8\,t + 0{,}1)^2}{R} \tag{1.3.2}$$

Найдем значение нормального ускорения:

$$a_n = \frac{(0{,}8 \cdot 2 + 0{,}1)^2}{3} = 0{,}27\ м/c^2$$

3.Полное ускорение найдем по формуле:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \tag{1.3.3 }$$

Найдем его значение: $a = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}27^2} = 0{,}84\ м/c^2$

Ответ: 0,8м/с^2; 0,27м/с^2; 0,84м/с^2.

Пример 1.4:

Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = 0{,}5\,t^2$. Определите к концу второй секунды после начала движения: угловую скорость диска, угловое ускорение диска, для точки находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное, нормальное и полное ускорение.

Дано: $\varphi = 0{,}5\,t^2$; t=2 с; R=0,8м.

Найти: ω(2)–?; ε(2)–?; a_τ–?; a_n–?; a–?.

Решение:

1.Угловую скорость найдем по формуле:

$$\omega = \frac{d\,\varphi}{d\,t} = (0{,}5\,t^2)' = t$$

Найдем значение ω:

$$\omega(2) = 2\,\frac{рад}{с}$$

2.Угловое ускорение найдем по формуле:

$$\varepsilon = \frac{d\,\omega}{d\,t} = (t)' = 1\,\frac{рад}{с^2}$$

3.Тангенциальное ускорение найдем по формуле:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R, \quad a_\tau = 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}8\ м/с^2$$

4.Нормальное ускорение найдем по формуле:

$$a_n = \omega^2 \cdot R; \quad a_n = 2^2 \cdot 0{,}8 = 3{,}2\ м/с^2$$

5.Полное ускорение найдем по формуле:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad a = \sqrt{0{,}8^2 + 3{,}2^2} = 3{,}3\ м/с^2,$$

Ответ: 2рад/с; 1рад/с; 0,8м/с^2; 3,2м/с^2; 3,3м/с^2.

1.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Радиус–вектор материальной точки изменяется со временем по закону: $\vec{r} = 4\,t^2\,\vec{i} + 3\,t\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.Определите: 1) скорость $\vec{\upsilon}$, 2) ускорение $\vec{a}$; 3) модуль скорости в момент времени t=2c (Ответ: $\vec{\upsilon} = 8\,t\,\vec{i} + 3\,\vec{j};\ \vec{a} = 8\,\vec{i};\ \upsilon = 16{,}3\ м/с$).

2. Точка движется согласно уравнению *x=7+4t*, *y=2+3t*. Какова ее скорость движения (Ответ: 5 м\с).

3. Движение точки описывается уравнением $x=4t^4+2t^2+7$. Найдите скорость и ускорение точек в момент времени *t=2c* и среднюю скорость за первые 2с движения. (Ответ: υ=136 м\с, а =196 м\с^2, υср= 39,5 м\с)

4. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x = 5 + 4\,t + 0{,}1\,t^2 + 0{,}03\,t^3$. Определите: 1) через сколько времени после начала движения ускорение а тела будет равно 2м/с^2. 2) среднее ускорение за этот промежуток времени. (Ответ: t=10с; $a_{ср}$=1,1м/с^2)

5. Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид: $x_1 = 0{,}1 + 2\,t - 2\,t^2$ $и$ $x_2 = 0{,}3 + 2\,t + t^2$. Определите: 1) момент времени, для которого скорости этих точек будут равны. 2) ускорения a_1 и a_2 для этого момента времени. (Ответ: t=0; a_1=4м/с^2; a_2=2м/с^2)

6. По окружности радиусом 20см движется материальная точка. Уравнение ее движения $\xi=2t^2+t$. Чему равны тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени, равный 10с? (Ответ: a_τ= 4 м\с^2, $a_п$= 16,81 м\с^2 , a=17,28 м\с^2).

7. Уравнение вращения твердого тела $\varphi=3t^2+t$. Определить число оборотов тела, угловую скорость. угловое ускорение через 10с после начала вращения (Ответ: N= 49, ω=61 рад\с,ε =6 рад\с^2).

8. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε=3рад/с^2. Определите радиус колеса, если через 1с. после начала движения полное ускорение колеса а=7,5 м/с^2 (Ответ: R=79 см).

9. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска задается уравнением $\varphi=0{,}1\,t^2$. Определите полное ускорение точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент равна 0,4м/с. (Ответ: a=0,256м/с^2).

10. Уравнение движения материальной точки по прямой имеет $x=A+Bt+Ct^2$ (А=5м, В=4м\с, С=-1м\с^2). Определите: 1) среднюю скорость за интервал времени от 1с до 6с; 2) среднюю путевую скорость за этот же интервал времени (Ответ: υср =-3 м\с; ;3,4 м\с).

1.4 Домашняя контрольная работа № 1

Вариант I

1. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x = 3\,t + 0{,}25\,t^2\ (м)$. Найдите уравнения зависимости *υ(t)* и *a(t)*. Постройте графики зависимости координаты, пути, скорости и ускорения от времени для заданного движения.

2. Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении две точки, причем вторая начала свое движение через 2 с после первой. $\upsilon_{01}=1 м/с$, $a_1=2 м/с^2$, $\upsilon_{02}=10 м/с$, $a_2=1 м/с^2$. Через сколько времени и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую?

3. Материальная точка движется по окружности согласно уравнению $\vec{r}(t)=\vec{i}A\,t^3+\vec{j}B\,t^2$. Напишите зависимости: $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$.

4. Движение точки по окружности радиусом *4м* задано уравнением $\xi=10-2\,t+t^2\ (м)$, где ξ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль траектории. Найдите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени *2с*.

5. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $2с^{-2}$. Через *0,5 с* после начала движения полное ускорение колеса стало равным $13{,}6\ см/с^2$. Найдите радиус колеса.

Вариант II

1. Движение материальной точки задано уравнением $x=4\,t-0{,}05\,t^2\ (м)$. Определите момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найдите координату и ускорение в этот момент. Постройте графики зависимости координаты, пути, скорости и ускорения этого движения от времени.

2. Рядом с поездом на одной линии с передними буферами паровоза стоит человек. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением $0{,}1 м/с^2$, человек начал идти в том же направлении со скоростью 1,5м/с. Через какое время поезд догонит человека? Определите скорость поезда в этот момент и путь, пройденный за это время человеком.

3. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t)=\vec{i}\,(10-5\,t^2)+\vec{j}\ 10\,t\ (м)$.Начертите траекторию точки. Напишите зависимости: $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$. Для момента времени 1с вычислите модуль скорости.

4. Движение точки по окружности радиусом 2м. задано уравнением $\xi=2\,t^3\ (м)$, где ξ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль траектории. В какой момент времени тангенциальное ускорение будет равно нормальному? Определите полное ускорение точки в этот момент времени.

5. Колесо радиусом 5см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi=t^3$(рад). Найдите для

точек, лежащих на ободе колеса, изменение тангенциального ускорения за каждую секунду движения.

Вариант III

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = 2t - 3t^2 + 4t^3$ $(м)$. Найдите уравнения зависимостей $\vec{\upsilon}(t), \vec{a}(t)$; расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения. Постройте графики x(t), S(t), υ(t) и a(t) для $0 \le t \le 3$ с.

2. Тело А начинает двигаться с начальной скоростью υ_{01} и движется с постоянным ускорением a_1. Одновременно с телом A начинает двигаться тело В с начальной скоростью υ_{02} и движется с постоянным отрицательным ускорением a_2. Через сколько времени после начала движения оба тела будут иметь одинаковую скорость?

3. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}(10 - 5t^2) + \vec{j}\,10t$ $(м)$. Начертите траекторию точки. Напишите зависимости: $\vec{\upsilon}(t), \vec{a}(t)$. Для момента времени 1с вычислите модуль ускорения.

4. Движение точки по кривой задано уравнениями $x=t^3$(м) и $y=2t$(м). Найдите уравнение траектории точки, ее скорость и полное ускорение в момент времени 0,8с.

5. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = t + t^2 + t^3$ $(рад)$. Найдите радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно 346 м/с^2.

Вариант IV

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = 6 - 3t + 2t^2$ $(м)$. Найдите уравнения зависимостей $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$; среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале от 1 до 4 с. Постройте графики x(t), S(t), υ(t) и a(t) для $0 \le t \le 5$ с.

2. Скорость поезда, двигающегося равнозамедленно, уменьшается в течение 1 мин от 40 до 28 км/ч. Найдите ускорение поезда и расстояние, пройденное им за 1 мин.

3. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}(10 - 5t^2) + \vec{j}\,10t$ $(м)$. Начертите траекторию точки. Напишите зависимости: $\vec{\upsilon}(t), \vec{a}(t)$. Для момента времени 1с вычислите модуль тангенциального ускорения.

4. Точка движется по окружности радиусом 2см. Зависимость пути от времени дается уравнением $\xi=0{,}1t^3$ (см), где ξ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль траектории. Найдите нормальное и тангенциальное ускорения точки в тот момент времени, когда линейная скорость точки равна 0,3м/с.

5. Колесо радиусом 0,1м вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса дается уравнением $\varphi = 2\,t + t^3\ (рад)$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите угловую и линейную скорости, нормальное ускорение через 2с после начала движения.

Вариант V

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = 0{,}14\,t^2 + 0{,}01\,t^3\ (м)$. Найдите: 1) уравнения зависимостей $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$; 2) через сколько времени после начала движения ускорение, тела будет равно 1 м/с^2 ?; 3) чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени? Постройте графики *x(t), S(t), υ(t)* и a(t) для $0 \le t \le 5$с.

2. Вагон движется равнозамедленно с ускорением 0,5 м/с^2. Начальная скорость вагона 54 км/ч. Через сколько времени и на каком расстоянии от начальной точки вагон остановится ?

3. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}\,(10 - 5\,t^2) + \vec{j}\,10\,t\ (м)$. Начертите траекторию точки. Напишите зависимости: $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$. Для момента времени 1с вычислите модуль нормального ускорения.

4. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнение $\xi = -2\,t + t^2\ (м)$, где ξ – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль траектории. Найдите линейную скорость точки, ее нормальное, тангенциальное и полное ускорения через 3с после начала движения, если известно, что нормальное ускорение в момент времени 2с равно 0,5м/с^2.

5. Колесо радиусом 0,1 м вращается так, что зависимость от времени угла поворота радиуса колеса дается уравнением $\varphi = 2\,t + t^3\ (рад)$. Для точек, лежащих на ободе колеса, найдите угловую скорость, угловое и тангенциальное ускорения через 2с после начала движения.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Динамика поступательного движения

2 .1 Основные вопросы теории

Динамика – раздел механики, занимающийся изучением движения тел в зависимости от действия приложенных к ним сил. В основе динамики лежат законы Ньютона.

Законы Ньютона .Законы динамики устанавливают связь между движением тела и причинами, которые вызвали это движение. Законы динамики есть законы взаимодействия тел, определяющие движение одного тела относительно другого.

I закон Ньютона:

Существуют такие системы отсчета, относительно которых материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерно прямолинейно движется, если на неё (него) не действуют другие тела или действие этих сил скомпенсировано.

Стремление тела сохранять свою скорость постоянной называется **инерцией.**

I закон – закон инерции, он выполняется не для всех систем отсчета.

Системы отсчета, относительно которых выполняется I закон Ньютона называются **инерциальные системы отсчета.**

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета, можно считать систему отсчета связанную с Землей.

Все с.о. покоящиеся или движущиеся с постоянной скоростью относительно Земли тоже считают инерциальными.

Неинерциальные – движущиеся с ускорением относительно Земли.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела приобретают различные ускорения. Это свойство самого тела называется инертностью.

Масса тела – это физическая величина, являющаяся мерой инертности тела.

Сила – это физическая величина, являющаяся мерой воздействия на тело других тел или полей.

II закон Ньютона*:*

Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

При решении задач удобно пользоваться вторым законом Ньютона , записанным в другом виде:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Векторная величина равная произведению $m\vec{v}$ и имеющая направление скорости называется **импульсом.**

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ - **основной закон динамики поступательного движения:**

Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

$\left[\vec{F}\right] = H, \left[m\right] = кг$

III закон Ньютона:

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга, носит характер взаимодействия; силы с которыми действуют материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Вопросы для проверки знаний:

1. Какие системы отсчета называются инерциальными?
2. Дайте определение инертности, инерции.
3. Сформулируйте первый закон Ньютона.
4. Что называется массой, силой, равнодействующей силой? Назовите их единицы измерения

5. Сформулируйте второй закон Ньютона через ускорение и через импульс.
6. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите пример, сделайте пояснительный рисунок.
7. Дайте определение силы тяжести по схеме: определение, формула, точка приложения, направление.
8. Дайте определение веса тела по схеме: определение, формула, точка приложения, направление.
9. Дайте определение силы упругости по схеме: определение, формула, точка приложения, направление.
10. Дайте определение силы трения по схеме: определение, формула, точка приложения, направление.

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1:

Груз массой 30 кг равноускоренно поднимают с помощью каната вертикально вверх с течением 3 с на высоту 15 м. Определите силу натяжения каната.

Дано: *m=30 кг; t=3 с; h=15 м*

Найти: *T*

Решение:

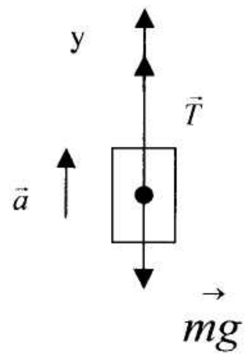


Рисунок 1 – Применение второго закона Ньютона к решению задачи 2.1

1. На груз действуют: $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}$ – сила натяжения каната. Так как груз движется равноускоренно вверх, то и вектор ускорения $\vec{a}$ так же направлен вверх.

2. Запишем для груза второй закон Ньютона:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

3. Выберем ось y в направление движения груза и найдем проекции сил на эту ось:

$$T - mg = m\vec{a}$$

$$T = ma + mg$$

4. Так как движение равноускоренное и начальная скорость равна 0, то

$$h = \frac{at^2}{2},\ откуда\ a = \frac{2h}{t^2}$$

Тогда $$T = m \cdot (g + \frac{2h}{t^2})$$

5. Найдем значение T:

$$T = 30 \cdot (9{,}8 + \frac{2 \cdot 15}{3^2}) = 394\ Н$$

Ответ: *394 Н*

Пример 2.2:

Брусок массой *2 кг* скользит по горизонтальной поверхности стола под действием груза массой *0,5 кг*, прикрепленного к концу нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения бруска о поверхность *0,1*. Найти ускорение движения тела.

Дано: m_1=2m; m_2=0,5 кг; μ=0,1.

Найти: *a-?*

Решение:

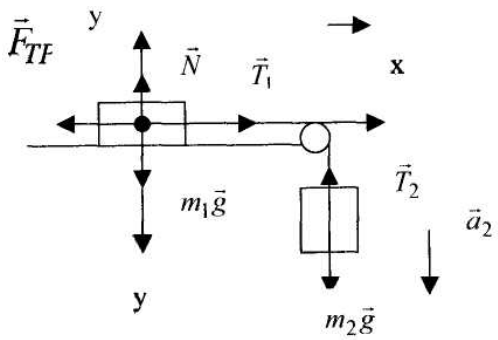


Рисунок 2 – Применение второго закона Ньютона к решению задачи 2.2

1. Рассмотрим движение каждого груза отдельно.

На брусок действуют: $m_1\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}_1$–сила натяжения нити; $\vec{N}$ – сила реакции опоры; $\vec{F}_{TP}$–сила трения.

2. Запишем для бруска второй закон Ньютона:

$$m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{TP} = m_1\vec{a}_1$$

3. Спроецируем уравнение на выбранные направления осей x и y:

$$ox:\ T_1 - F_{тр} = m_1 a_1 \qquad (2.2.1)$$

$$oy:\ m_1 g - N = 0 \qquad (2.2.2)$$

Так как $F_{тр} = \mu \cdot N$, а из (2) $N = m_1 g$, то (1) примет вид

$$T_1 - \mu \cdot m_1 g = m_1\ a_1 \qquad (2.2.3)$$

4. На груз действуют силы: $m_2\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}_2$–сила натяжения нити.

5. Запишем для груза второй закон Ньютона:

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$$

6. Спроецируем уравнение на ось у:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \qquad (2.2.4)$$

7. Решаем совместно систему уравнений (2.2.3) и (2.2.4):

$$\begin{cases} T_1 - \mu \cdot m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

Учитывая, что

$$T_1 = T_2 = T;\ a_1 = a_2 = a.$$

получаем:

$$\begin{cases} T - \mu \cdot m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

$$m_2 g - \mu \cdot m_1 g = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{m_2 g - \mu \cdot m_2 g}{m_1 + m_2}$$

8. Найдем значение: $a = \dfrac{0{,}5 \cdot 9{,}8 - 0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{0{,}5 + 2} = 1{,}2\ м/с^2$

Ответ: *$a=1,2\ м/с^2$*.

Пример 2.3:

Через блок в виде диска перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1*=300 г* и m_2*=600 г*.С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Дано: m_1*=300 г=0,3 кг;* m_2*=600 г=0,6 кг.*

Найти: *a*–?

Решение:

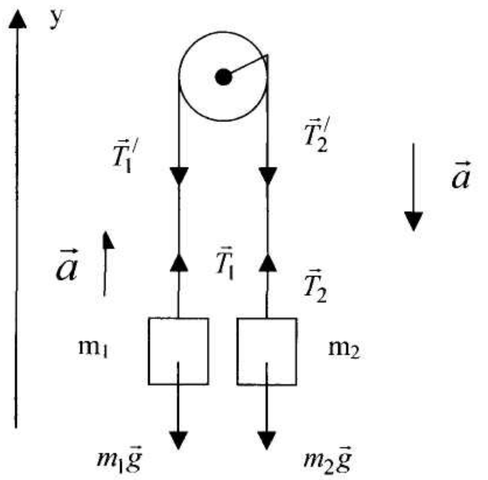


Рисунок 3 – Применение второго закона Ньютона к решению задачи 2.3

1. Применим основные законы поступательного движения.

На каждый груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вверх.

2. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела.

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a} \\ \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \end{cases}$$

3. Найдем проекции этих векторов на ось OY.

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_1 g = -m_1 a \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 = m_1 a + m_1 g \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \end{cases}$$

4. По третьему закону Ньютона, силы $\vec{T}_1$ *и* $\vec{T}_2$ равны, но противоположны по направлению:

$$m_2g - m_2a - (m_1g + m_1a) = \frac{m}{2}a$$

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1 + \frac{m}{2})a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

5. Найдем значение: $a = \frac{(0{,}6 - 0{,}3) \cdot 9{,}8}{0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}4} = 2{,}26\ м/с^2$

Ответ: *a=2,26 м/с^2*.

Пример 2.4:.

Груз массой 5кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой 2кг, движется вниз по наклонной плоскости. Найти силу напряжения нити и ускорение грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью 0,1. Угол наклона плоскости к горизонту 36^0. массами нитей блока, а также трением в блоке пренебречь.

Дано: $m_1 = 5кг$; $m_2 = 2кг$; $k = 0{,}1$; $\alpha = 36^0 \approx 0{,}63$ рад.

Найти: $T - ?$ $a - ?$

Решение: 1. Рассмотрим движение каждого груза отдельно.

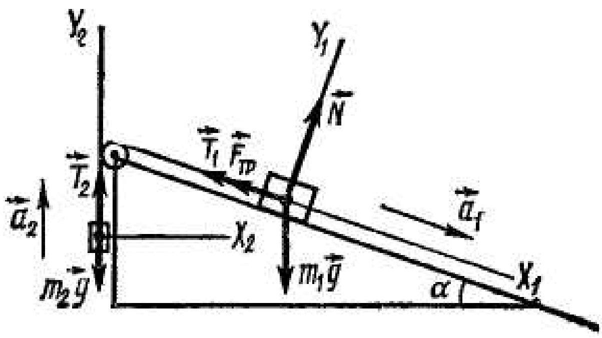


Рисунок 4 – Применение второго закона Ньютона к решению задачи 2.4

На груз действуют: m_1g – сила тяжести, N – сила нормальной реакции наклонной плоскости, T_1 – сила натяжения нити, $F_{тр}$ – сила трения (рисунок 4)

По условию задачи, вектор ускорения a_1 для первого груза направлен вниз вдоль наклонной плоскости.

2. Запишем для первого груза второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m_1 g + N + T_1 + F_{тр} = m_1 a_1$$

3. Найдем проекции этих векторов на выбранные направления осей X_1 и Y_1 получаем:

$$m_1 g \sin\alpha - T_1 - F_{тр} = m_1 a_1 \tag{2.4.1}$$

$$-m_1 g \cos\alpha + N = 0 \tag{2.4.2}$$

Из уравнения (2.4.2) находим, что $N = m_1 g \cos\alpha$ поэтому

$$F_{тр} = kN = km_1 g \cos\alpha \tag{2.4.3}$$

Подставляя выражение (2.4.3) в уравнение (2.4.1), получаем

$$m_1 g \sin\alpha - T_1 - km_1 g \cos\alpha = m_1 a_1 \tag{2.4.4}$$

4. На второй груз действуют: $m_2 g$ - сила тяжести, T_2 - сила натяжения нити. Ускорение a_2 второго груза направлено вертикально вверх.

5. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для второго груза:

$$m_2 g + T_2 = m_2 a_2 \tag{2.4.5}$$

6. Найдем проекции этих векторов на Y_2, получим

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a_2\,. \tag{2.4.6}$$

7. Сложив уравнения (2.4.4) и (2.4.6), получим

$$m_1 g \sin\alpha - T_1 - km_1 g \cos\alpha + T_2 - m_2 g = m_1 a_1 + m_2 a_2\,.$$

Учитывая, что $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_2 + a$ находим

$$a = \frac{m_1 g(\sin\alpha - k\cos\alpha) - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\sin\alpha - k\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} g;$$

8. Найдем значение: $a = \frac{5(0{,}59 - 0{,}1 \cdot 0{,}81) - 2}{5 + 2} \cdot 9{,}8 \frac{м}{с^2} = 0{,}84 м/с^2$.

9. Силу натяжения нити определим из уравнения (2.4.6):

$$T_2 = m_2 a_2 + m_2 g = m_2(g + a)$$

10. Найдем значение: $T = 2(9{,}8 + 0{,}84)H \approx 21{,}3H$

Ответ: *a=0, 84 м/с²*, *T= 21,2 Н.*

2.3 Задачи для самостоятельного решения

1. К нити подвешен груз массой *m=500* г. Определите силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением2 м/с^2 (Ответ: *T=5,9* Н*; T=3,9* Н).

2. Два груза (m_1*=500* г и m_2*=700* г) связаны невесомой нитью и лежат на горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально, направленная сила *F=6* Н. Пренебрегая трением, определите: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. (Ответ:*a=5 м/с^2; T=3,5 Н*).

3. Вагон массой 20 т движется равнозамедленно с ускорением 0,3 м/с^2 и начальной скоростью 54 км/ч. Найти силу торможения, коэффициент трения, время движения вагона до остановки и перемещение вагона. (Ответ:F=6 кН; μ=0,03; t=50 с;s= 375 м)

4. Тело массой 200 кг равномерно тянут с силой 1500 Н вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30^0. С каким ускорением тело будет соскальзывать с наклонной плоскости, если его отпустить (Ответ: a=2,5 м/с^2)

5. На столе лежат два бруска, связанные нитью. На брусок 1 действует сила 20 Н под углом α=30^0 к горизонту. Коэффициент трения брусков о стол k=0,1, масса брусков m_1=4 кг и m_2=2 кг. Определить ускорение, с которым движутся тела, а также силу натяжения нити. (Ответ:*a*=2 м/с^2; T=6 Н)

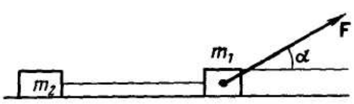


Рисунок 5 – К решению задачи 5

6. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту, равным 30, скользит тело. Определить скорость тела в конце третьей секунды от начала скольжения, если коэффициент трения 0,15. (Ответ: 10,9 м\с)

7. На наклонной плоскости находится тело массой m, на которое действует горизонтально направленная сила F. Определить ускорение тела *а* и силу, с которой оно давит на плоскость, $F_Д$. Коэффициент трения тела о плоскость равен k, наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α.

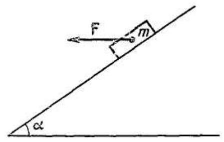


Рисунок 6 – К решению задачи 7

(Ответ: $a = \frac{[F(\cos\alpha + k\sin\alpha) + mg(\sin\alpha - k\cos\alpha)]}{m}$; $F_Д = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$)

8. Две гири связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Разность их высот равна 2 м. Представленные самим себе, гири через 2 с после начала движения оказались на одной высоте. Какова масса более легкой гири, если масса другой гири 0,2 кг? Масса блока равна нулю.

9. (Ответ: m_1=0,16 кг)

10. Через блок перекинута нить, к которой привязаны два груза одинаковой массы. Грузы лежат на плоскостях клина, расположенных под углами α и β к горизонту; α=30^0, β=60^0. Коэффициент трения грузов о плоскости равен k=0,1. Определить ускорения тел. (Ответ: $a = \frac{g}{2}(\sin\beta - \sin\alpha) - k(\cos\alpha + \cos\beta)$; *a*=1,15 м/с^2)

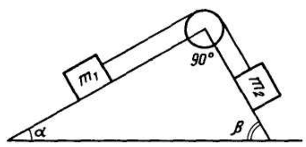


Рисунок 7 –К решению задачи 10

11. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом 80м. Какова должна быть наименьшая скорость самолета, чтобы летчик не оторвался от сиденья в верхней части петли?
(Ответ: 28 м\с)

2.4 Домашняя контрольная работа № 2

Вариант I

1. Конькобежец движется по горизонтальному пути равномерно, а затем проезжает до остановки путь 60 м в течение 25 с равнозамедленно. Определите коэффициент трения.

2. При каком ускорении разорвется трос при подъеме груза массой 500 кг, если максимальная сила натяжения, которую выдерживает трос не разрываясь, равна 15 кН?

3. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузы массой 100 и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузы? Трение при вращении блока ничтожно мало.

4. На наклонной плоскости длиной 13 м и высотой 5 м лежит груз массой 26 кг. Коэффициент трения равен 0,5. Какую силу надо приложить к грузу вдоль плоскости, чтобы втащить груз? Чтобы стащить груз?

5. Груз, подвешенный на нити длиной ℓ=60 см, двигаясь равномерно, описывает в горизонтальной плоскости окружность. С какой скоростью υ движется груз, если во время его движения нить образует с вертикалью постоянный угол $\alpha=30^0$?

Вариант II

1. К нити подвешен груз массой 1 кг. Найдите натяжение нити, если нить с грузом начать опускать с ускорением 5 м/с^2.

2. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 0,5 м/с^2. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найдите общую продолжительность движения и общее расстояние, пройденное трамваем.

3. Два тела массами 0,25 и 0,15 кг связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит первое тело. С каким ускорением движутся тела? Коэффициент трения первого тела о

поверхность стола равен 0,2. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебрегите.

4. На наклонной плоскости длиной 50 см и высотой 10 см покоится брусок массой 2 кг. При помощи динамометра, расположенного параллельно плоскости, брусок сначала втащили вверх по наклонной плоскости, а затем стащили вниз. Найти разность показаний динамометра.

5. Мальчик массой 50 кг качается на качелях с длиной подвеса 4 м. С какой силой он давит на сиденье при прохождении среднего положения со скоростью 6 м/с?

Вариант III

1. Стальная проволока выдерживает силу натяжения 4400 Н. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой 400 кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она при этом не порвалась?

2. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 0,5 м/с^2. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и .трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найдите ускорение трамвая при равнозамедленном движении.

3. Маневровый тепловоз массой 100 т тянет два вагона массой по 50 т каждый с ускорением 0,1 м/с^2. Найти силу тяги тепловоза и силу натяжения сцепок, если коэффициент сопротивления движению равен 0,006.

4. Какую силу надо приложить для подъема вагонетки массой 600 кг по эстакаде с углом наклона 20^0, если коэффициент сопротивления движению равен 0,05?

5. Автомобиль массой 2 т проходит по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 40 м, со скоростью36 км/ч. С какой силой автомобиль давит на мост в его середине?

Вариант IV

1. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Найдите, с каким ускорением движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт, равно 12 кН.

2. На автомобиль массой 1 т во время движения действует сила трения, равная 0,1 mg. Чему должна быть равна сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался равномерно?

3. С каким ускорением *a* скользит брусок по наклонной плоскости с углом наклона α=30^0 при коэффициенте трения μ=0,2.

4. На конце стержня длиной 1 м укреплен груз массой 0,4 кг, приводимый во вращение в вертикальной плоскости с постоянной частотой вращения. С какой силой действует груз на стержень в верхней и нижней точках траектории при частоте вращения: а) 0,4 $с^{-1}$; б) 0,5 $с^{-1}$; в) 1 $с^{-1}$?

5. На нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены грузы массами 0,3 и 0,34 кг. За 2 с после начала движения каждый груз прошел путь 1,2 м. Найти ускорение свободного падения, исходя из данных опыта.

Вариант V

1. К нити подвешена гиря. Если поднимать эту гирю с ускорением 2 м/$с^2$, то натяжение нити будет вдвое меньше того натяжения, при котором нить разрывается. С каким ускорением надо поднимать эту гирю, чтобы, нить разорвалась?

2. Автомобиль «Жигули» массой 1 т, трогаясь с места, достигает скорости 30 м/с через 20 с. Найти силу тяги если коэффициент сопротивления равен 0,05.

3. Вертолет, масса которого 27,2 т, поднимает на тросах вертикально вверх груз массой 15,3 т с ускорением 0,6 м/$с^2$. Найти силу тяги вертолета и силу, действующую со стороны груза на прицепной механизм вертолета.

4. На наклонной плоскости длиной 5 м и высотой 3 м находится груз массой 50 кг. Какую силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить, чтобы удержать этот груз? Тянуть равномерно вверх? Тянуть с ускорением 1 м/$с^2$? Коэффициент трения 0,2.

5. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом 200м . во сколько раз сила. С которой летчик давит на сиденье в нижней точке, больше силы тяжести летчика, если скорость самолета 100м/с ?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Законы сохранения импульса и энергии

3.1 Основные вопросы теории

Закон сохранения импульса.

Механическая система – совокупность материальных точек (тел), рассматриваемое как единое целое.

Внутренние силы – силы взаимодействия между материальными точками механической системы.

Внешние силы – силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела.

Замкнутая система – механическая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = const}$$

Изменение импульса системы равна суммарному импульсу сил, действующих на тело, то есть, чтобы изменить импульс системы (тела), нужно подействовать силой.

$$d\vec{p} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N)dt$$

Центр масс. Движение центра масс.

Центром масс системы называют точку С, которая делит расстояние между материальными точками обратно пропорционально отношению их масс.

Возьмем две точки, расстояние между которыми ℓ, а массы m_1 и m_2.

0 – начало отсчета; 0Х – координатная прямая; x_1 - координата первой точки; x_2 - координата второй точки.

$\ell = x_2 - x_1$

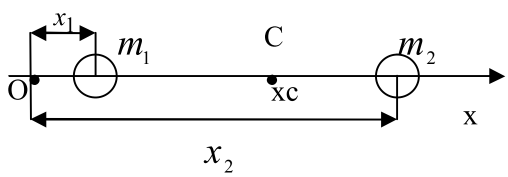


Рисунок 8 – Центр масс системы двух тел

Выразим координату центра масс системы:

$$x_c = \frac{m_2 x_2 + m_1 x_1}{m_1 + m_2}$$

Если система материальных точек является замкнутой, то суммарный импульс является постоянным $\sum_{i=1}^{N} m_i v_i = const$ следовательно $\vec{v}_c M = const$ и $\vec{v}_c = const$.

Работа. Мощность. КПД. Скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения называется **элементарной работой** силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

По определению $\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\alpha$ – число.

$$\Delta A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\Delta A = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

Если α – острый, то $\cos\alpha > 0 \quad \Delta A > 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha = 0 \; \Delta A = 0$

α – тупой, то $\cos\alpha < 0 \; \Delta A < 0$

$\left[A\right] = 1 Дж = 1 Н \cdot 1 м$.

Если на материальную точку действует не одна, а несколько сил, то равнодействующая всех сил равна $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N$

Элементарная работа равнодействующей силы определяется по формуле:

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + ... + \vec{F}_N \cdot \Delta\vec{r}$$

$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ – работа равнодействующей всех сил равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

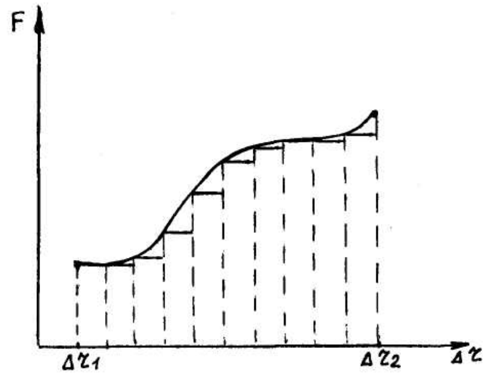
1) Если на тело действует $\vec{F} = const$, и траектория прямолинейная, то элементарная работа

$$\Delta A_i = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$\Delta A_i = F \cdot \Delta r_i \cdot \cos\alpha$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = F\cos\alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \Delta r_i}_{\Delta\ell} = F\Delta\ell\cos\alpha$$

2) Если на тело действует переменная сила $\vec{F}$ и известен график зависимости $F(\Delta r)$



$\Delta A = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$

$F_{\Delta r}$ проекция F на Δr.

$\Delta A = F_{\Delta r} \cdot \Delta r$

Рисунок 9 – График зависимости $F(\Delta r)$

Весь график разобьем на элементарные, бесконечно малые элементы, в пределах которых можно считать, что $\vec{F} = const$.

$$\Delta A_i = F_{\Delta ri} \cdot \Delta r_i$$

В пределе при $\Delta r_i \to 0$ $\quad dA = F_{\Delta r} \cdot dr$

Мощность – это физическая величина равная работе, совершаемой в единицу времени.

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$N = F \cdot v \cdot \cos\alpha$$

$$[N] = 1Вт = \frac{1Дж}{1с}$$

$$кпд = \eta = \frac{A_{полезная}}{A_{затраченная}} \cdot 100\%$$

Энергия. Виды энергии.

Энергия – это физическая величина, характеризующая способность тел совершать работу.

II вида механической энергии:

1) кинетическая

2) потенциальная

$T = \dfrac{mv^2}{2}$ – **кинетическая энергия**, характеристика интенсивности движения, физическая величина, определяемая состоянием тела (функция состояния).

$U = mg\text{h}$ – **потенциальная энергия** гравитационного взаимодействия;

$U = kx^2/2$ – **потенциальная энергия** упругого взаимодействия.

Свойства потенциальных полей:

I. $A = -\Delta u$ Работа равна убыли потенциальной энергии.

Работа в гравитационном поле не зависит от формы траектории, а зависит от начального и конечного положения точки в данном поле.

II. $\oint dA = \int\limits_{h_2}^{h_1} dA = 0$ Работа по замкнутому контуру в гравитационном поле всегда равна нулю.

Поле, обладающее свойствами I и II называется **потенциальным,** а функцию u – потенциальной энергией.

Силы, поля которых потенциальные, называются **консервативными.**

В поле консервативных тел нет превращений механической энергии в другие виды. Механическая энергия сохраняется. Консервативные силы всегда центральны.

Если поле неконсервативное, то силы называются **диссипативными** ($F_{трен}, F_{сопр}$) их работа всегда отрицательна.

В поле диссипативных сил происходит превращение механической энергии во внутреннюю.

III. $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\underbrace{\frac{du}{dx}\vec{i} + \frac{du}{dy}\vec{j} + \frac{du}{dz}\vec{k}}_{gradU}\right)$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} \quad u = -\vec{\nabla} u$$

Сила в каждой точке потенциального поля может быть определена как производная потенциальной энергии по соответствующим координатам.

$\vec{\nabla}$ – вектор, оператор Набла – сумма частных производных по соответствующим координатам.

Законы сохранения и не сохранения механической энергии

Обозначим:

$dA_{внеш}$ – работа внешних консервативных сил на бесконечно малом участке перемещения.

$dA^*_{внеш}$ – работа внешних неконсервативных сил на бесконечно малом участке перемещения.

$dA_{внут}$ – работа внутренних консервативных сил на бесконечно малом участке перемещения.

dT – бесконечно малое изменение кинетической энергии всех частиц системы.

Из I свойства потенциальных полей:

$$dA_{внеш} = -du_{внеш}$$

$$dA_{внут} = -du_{внут} \text{ (взаимодействия)}$$

$$-du_{внеш} + dA^* - du_{внут} = dT$$

$$dT + du_{внеш} + du_{внут} = dA^*$$

$$d\underbrace{(T + u_{внеш} + u_{внут})}_{полная\quad механ\quad энергия} = dA^*$$

$$dE_{мех} = dA^*$$

Закон не сохранения механической энергии:

Изменение полной механической энергии системы равно работе внешних неконсервативных сил.

Механическая энергия превращается во внутреннюю.

Закон сохранения механической энергии для незамкнутой системы , если внешняя сила – консервативная.

а) если $\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^* = 0$, то $dA^* = 0$

$dE_{мех} = 0 \Rightarrow E_{мех} = T + u_{внеш} + u_{внут} = const$

Закон сохранения механической энергии для замкнутой системы.

б) если $\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i = 0$, то $T + u_{внут} = const$

в) **Универсальный закон сохранения энергии**: Энергия не возникает из ничего и не исчезает бесследно, а лишь переходит из одного вида в другой.

Вопросы для проверки знаний:

1. Что называется импульсом тела?
2. Что называется импульсом силы?
3. Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса.
4. Что называется элементарной механической работой?
5. Как рассчитать работу постоянной силы?
6. Как рассчитать работу переменной силы?
7. Дайте определение механической энергии.
8. Что называется кинетической энергией? Какие тела обладают этой энергией?
9. Что называется потенциальной энергией? Назовите виды потенциальной энергии, запишите формулы.
10. Сформулируйте и запишите закон сохранения механической энергии.

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.1:

Снаряд массой 100 кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью 500 м/с, попадает в вагон с песком массой 10 т и застревает в нем. Какую скорость получит вагон, если он двигается со скоростью 36 км/ч в направление, противоположном движению снаряда.

Дано: m_1*=100 кг;* υ_1*=500 м/с;* m_2*=10 т=*10^4 *кг,* υ_2*=36 км/ч=10 м/с.*

Найти: *u*–?

Решение:

1. Запишем для снаряда и вагона с песком закон сохранения импульса при упругом ударе:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

2. Выберем направление оси X совпадающее с направлением движения снаряда и проецируя на нее обе части уравнения получим.

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u$$

Откуда: $$u=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}$$

3. Найдем значение: $$u=\frac{100\cdot500-10^4\cdot10}{100+10^4}=-5\ м/с$$

Следовательно, вагон со снарядом движется против выбранного направления оси X.

Ответ: *u=5 м/с*

Пример 3.2:

Пуля m_1=15 г, летящая горизонтально, попадает в шар m_2=1,5 кг, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Расстояние от точки подвеса стержня до центра 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на
угол 30°.

Дано: $m_1=15$ *г*, $m_2=1{,}5$ *кг*; $\ell=1$ *м*; $\alpha=30^0$

Найти: υ_1.

Решение:

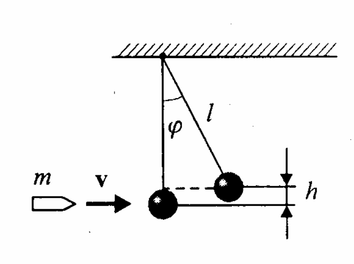


Рисунок 10 – Отклонение шара при попадании в него пули

1. Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_1\vec{\upsilon}_2=(m_1+m_2)\vec{u} \tag{3.2.1}$$

2. Выберем направление оси X совпадающей с направлением скорости пули и проектируем на нее уравнение (3.2.1):

$$m_1\upsilon_1=(m_1+m_2)u$$

откуда: $$\upsilon_1=\frac{(m_1+m_2)u}{m_1} \tag{3.2.2}$$

где *u*–скорость пули и шара после их столкновения.

3. Скорость *u* найдем из закона сохранения энергии.

Пусть в результате столкновения с пулей центр массы шара поднялся на высоту h, тогда закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh.$$

Откуда:

$$u^2 = 2gh \qquad (3.2.3)$$

4. Из рисунка имеем:

$$h = \ell - \ell \cos\alpha = \ell(1 - \cos\alpha) \qquad (3.2.4)$$

Подставив (3.2.4) в (3.2.3):

$$u^2 = 2g\ell(1 - \cos\alpha)$$

$$u = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} \qquad (3.2.5)$$

5. Подставив (3.2.5) в(3.2.2) получим расчетную формулу:

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)}$$

6. Найдем значение: $\upsilon_1 = \frac{0.015 + 1.5}{0.015} \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1\left(1 - \cos 30^0\right)} = 164\ м/с$

Ответ: υ_1*=164 м/с*

Пример 3. 3.

Два шара массами m_1=2.5 и m_2=1.5 кг движутся навстречу друг другу со скоростями υ_1=6 м/с и υ_2=2 м/с. Определить: 1) скорость шаров *u* после удара; 2) кинетические энергии шаров T_1 до и T_2 после удара; 3) долю кинетической энергии шаров, превратившейся во внутреннюю энергию. Удар считать прямым, неупругим.

Дано: m_1=2.5 кг ; m_2=1.5 кг; υ_1=6 м/с ; υ_2=2 м/с.

Найти: *u;* T_1 ; T_2; ω.

Решение:

1. Неупругие шары не восстанавливают после удара своей первоначальной формы. Следовательно, не возникают силы, отталкивающие шары друг от друга, и шары после удара будут двигаться совместно с одной и той же скоростью *u.* Определим эту скорость по закону сохранения импульса.

Так как шары движутся по одной прямой, то этот закон можно записать в скалярной форме:

$$m_1\,\upsilon_1 + m_2\,\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\,u\,,$$

Откуда
$$u = \frac{m_1\,\upsilon_1 + m_2\,\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

2. Направление скорости первого шара примем за положительное , тогда, при вычислении, скорость второго шара, который движется навстречу первому, следует взять со знаком минус:

$$u = \frac{(2{,}5\cdot 6 - 1{,}5\cdot 2)}{2{,}5 + 1{,}5}\ м/с = 3\ м/с$$

3. Кинетические энергии шаров до и после удара определим по формулам

$$T_1 = \frac{m_1\,\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\,\upsilon_2^2}{2};\ T_2 = \frac{(m_1 + m_2)\,u^2}{2}.$$

4. Произведя вычисления по этим формулам, получим

$$T_1 = \frac{2{,}5\cdot 6^2}{2} + \frac{1{,}5\cdot 2^2}{2} = 48\ Дж;$$

$$T_2 = \frac{(2{,}5 + 1{,}5)\cdot 3^2}{2} = 18\ Дж.$$

Проверим размерность: $T = \dfrac{кг\cdot(м/с)^2}{2} = \dfrac{кг\cdot м^2}{c^2} = Дж$

5. Сравнение кинетических энергий шаров до и после удара показывает, что в результате неупругого удара шаров уменьшение их кинетической энергии, за счет чего увеличилась их внутренняя энергия. Долю кинетической энергии шаров, пошедшей на увеличение их внутренней энергии, определим из соотношения:

$$\omega = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}$$

Откуда
$$\omega = \frac{48 - 18}{48} = 0{,}62$$

Ответ: $u = 3\ м/с;\ \begin{matrix} T_1 = 48\ Дж; \\ T_2 = 18\ Дж. \end{matrix};\ \omega = 0{,}62$

Пример 3. 4.

Молот массой m_1=200 кг падает на поковку, масса m_2 которой вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость υ_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти: 1) кинетическую энергию T_1 молота в момент удара; 2) энергию T_2, переданную фундаменту; 3) энергию Т, затраченную на деформацию поковки; 4) коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о поковку. Удар молота о поковку рассматривать как неупругий.

Дано: m_1=200 кг; m_2=2500 кг; υ_1=2 м/с.

Найти: T_1; T_2; Т; η.

Решение:

1. Кинетическую энергию молота в момент удара найдем по формуле

$$T_1 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

2. Подставив значения m_1 и υ_1 и произведя вычисления, получим T_1=400 Дж.

3. Чтобы определить энергию, переданную фундаменту, предварительно найдем скорость системы молот-поковка (с наковальней) непосредственно после удара. Для этого применим закон сохранения импульса, который в случае неупругого удара двух тел выражается формулой

$$m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2)\, u\,, \qquad (3.4.1)$$

где υ_2-скорость поковки (вместе с наковальней) перед ударом;

u-скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара.

4. Так как поковка с наковальней до удара находится в состоянии покоя, то υ_2=0. При неупругом удара деформация не восстанавливается, вследствие чего молот и поковка (с наковальней) движутся как одно целое, т. е. с одинаковой скоростью u.

Из формулы (3.4.1) найдем эту скорость:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad (3.4.2)$$

5. В результате сопротивления фундамента скорость u быстро гасится, а кинетическая энергия, которой обладает система молот-поковка (с наковальней), передается фундаменту. Эту энергию находим по формуле

$$T_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2$$

6. Заменим скорость u ее выражением (3.4.2):

$$T_2 = \frac{m_1^2\ \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)},$$

или, учитывая, что $T_1 = \dfrac{m_1\ \upsilon_1^2}{2}$, запишем

$$T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1. \qquad (3.4.3)$$

7. Подставив в уравнение (3.4.3) значения m_1 ; m_2и T_1 и произведя вычисления, получим T_2=29,6 Дж.

8. Молот до удара обладал энергией T_1; T_2-энергия, переданная фундаменту. Следовательно, на деформацию поковки использовалась энергия

$$T = T_1 - T_2.$$

Подставив в это выражение значения T_1 и T_2, получим T=370 Дж.

9. Назначение молота – путем ударов о поковку, находящуюся на наковальне, вызвать деформацию поковки; следовательно, энергию T следует считать полезной. КПД удара молота о поковку равен отношению энергии T, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta = \frac{T}{T_1} \text{ или } \eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}$$

10. Подставим в последнее выражение T_2 по формуле (3.4.3), получим

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

11. После подстановки значений m_1 и m_2 найдем$\eta = 92{,}6\ \%$

Ответ: T_1=400 Дж; T_2=29,6 Дж; T=370 Дж; $\eta = 92{,}6\ \%$.

3.3.Задачи для самостоятельного решения

1. Снаряд массой 10 кг обладал скоростью 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая, массой 3 кг, получила скорость 400 м/с в прежнем направлении. Найдите скорость большей части снаряда после разрыва. (Ответ:114 м/с)

2. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 600 м/с, попала в баллистический маятник массой 5 кг и застряла в нем. На какую высоту поднялся маятник ? (Ответ: 0,07 м)

3. Два груза массами 2 *кг* и 5 *кг* подвешены на нитях длиной 4 *м* так, что соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол 60° и отпущен. Какое количество теплоты выделится в результате удара? Удар считать абсолютно неупругим. (Ответ:Q=29 *Дж.)*

4. На спокойной воде пруда перпендикулярно берегу и носом к нему стоит лодка массой M = 200 кг и длиной L= 5 м . На носу лодки стоит человек массой m = 50 кг. На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с носа на корму лодки? Силами трения и сопротивления пренебречь. (Ответ: 1 м)

5. Шар массой 200 г, движущийся со скоростью 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой 800 г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы скорости шаров после удара? (Ответ:- 6 м/с, 4 м/с)

6. Тело массой 4 кг движется со скоростью 3 м\с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе. (Ответ: 9 Дж)

7. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом 10м. чтобы она сделала полную петлю и не выпала из желоба. Ответ:25 м)

3.4 Домашняя контрольная работа № 3

Вариант I

1. Лодка длиной ℓ=3 м и массой m=120 кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами m_1=60 кг и m_2=90 кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами?

2. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой m_1=300 кг, ударяет молот массой m_2=8 кг. Определить к. п. д. η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию куска железа.

3. Шар массой m_1=1 кг движется со скоростью v_1=4 м/с и сталкивается с шаром массой m_1=2 кг, движущимся навстречу ему со скоростью v_2=3 м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно- упругим, прямым, центральным

4. На двух шнурах одинаковой длины, равной 0,8 м, подвешены два свинцовых шара массами 0,5 и 1 кг. Шары соприкасаются между собой. Шар меньшей массы отвели в сторону так, что шнур отклонился на угол α=60°, и отпустили. На какую высоту поднимутся оба шара после столкновения? Удар считать центральным и неупругим. Определить энергию, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

5. Платформа с песком общей массой 2т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой 8кг и застревает в нем. Пренебрегая трением. определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда 450м/с, а ее направление- сверху вниз под углом 30 градусов к горизонту.

Вариант II

1. Молекула массой $m=4{,}65\cdot10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью υ=600 м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс, полученный стенкой за время удара.

2. В баллистический маятник массой 5 кг попала пуля массой 10 г и застряла в нем. Найдите скорость пули, если маятник, откачнувшись после удара, поднялся на высоту 10 см.

3. Шар массой m_1=5 кг ударяется о неподвижный шар массой m_2=2,5 кг. Кинетическая энергия системы двух шаров непосредственно после удара стала $E'_к$=5 Дж. Считая удар центральным и абсолютно неупругим, найти кинетическую энергию $E_{к1}$ первого шара до удара.

4. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой m_1=300 кг, ударяет молот массой m_2=8 кг. Определить к. п. д. η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию куска железа.

5. Велосипедист должен проехать по «чертову колесу» радиус которого 8м. С какой высоты велосипедист должен начать разбег, чтобы не упасть в верхней точке колеса?

Вариант III

1. Снаряд массой 20 кг летящий горизонтально со скоростью 500м/с, попадает в платформу с песком массой 10т и застревает в ней. Определите скорость, которую платформа получила от толчка

2. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе укреплено орудие, массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия 500 м/с. На какое

расстояние откатится платформа, если первоначально она стояла неподвижно? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.

3. Два груза массами 10 кг и 15 кг подвешены на нитях длиной 2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол 60° от вертикали и отпущен. Определите высоту, на которую поднимутся оба груза после абсолютно •неупругого удара.

4. На сколько переместится относительно берега лодка длиной ℓ=3,5 м и массой m_1=200 кг, если стоящий на корме человек массой m_2=80 кг переместится на нос лодки? Считать лодку расположенной перпендикулярно берегу.

5. Шар массой m_1=2 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Вариант IV

1. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе укреплено орудие массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия 500 м/с. Какое расстояние пройдет платформа после выстрела, если первоначально она двигалась со скоростью 18 км/ч, а выстрел был произведен в направлении ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.

2. Два шара массами 200 г и 100 г подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются между собой. Первый шар отклоняют так, что его центр поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после абсолютно неупругого соударения ?

3. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его m_1=60 кг, масса доски m_2=20 кг. С какой скоростью (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) υ=1 м/с? Массой колес и трением пренебречь.

4. Шар массой m_1=l кг движется со скоростью v_1=4 м/с и сталкивается с шаром массой m_1=2 кг, движущимся навстречу ему со скоростью v_2=3 м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно- упругим, прямым, центральным

5. Конькобежец массой 70кг. стоя на льду. бросает в горизонтальном направлении шайбу массой 0.3кг со скоростью 10м/с. На какое расстояние откатится конькобежец. если коэффициент трения коньков об лед 0,02?

Вариант V

1. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе укреплено орудие массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг, его скорость относительно орудия 500 м/с. Какое расстояние пройдет платформа после выстрела, если первоначально она двигалась со скоростью 18 км/ч, а выстрел был произведен против направления ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы равен 0,002.J

2. Пуля, летящая горизонтально, попадает в центр шара, подвешенного на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули составляет 0,001 часть массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найдите скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился после удара пули на угол 10°.

3. Шар массой m_1=2 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

4. Граната, летящая со скоростью 15 м/с, разорвалась на два осколка массами 6 и 14кг. Скорость большего осколка возросла до 24м/с по направлению движения. Найдите скорость и направление меньшего осколка.

5. Лодка массой 150кг и длиной 2,8м стоит неподвижно на стоячей воде. Рыбак массой 90кг в лодке переходит с носа на корму. Пренебрегая сопротивлением воды, определите, на какое расстояние сдвинется лодка

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Динамика вращательного движения. Законы сохранения момента импульса, энергии.

4.1 Основные вопросы теории

Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ относительной неподвижной точки О называется физическая величина равная векторному произведению радиус-вектора силы $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$.

$$M = rF\sin\alpha = F \cdot \ell$$

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{r}\vec{F}}\right), \qquad \ell \text{ – плечо}$$

Радиус-вектор силы – это направленный отрезок, соединяющий точку приложения силы с осью вращения.

$$\left[M\right] = H \cdot м$$

Если на тело, закрепленное на оси действуют несколько сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2 \ldots \vec{F}_n$, то суммарное их действие будет эквивалентно действию одного момента M, равного алгебраической сумме моментов всех действующих сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

При этом, если сила вращает тело по часовой стрелке, то будем считать её момент «-», если она вращает тело против часовой стрелки - «+».

Момент импульса

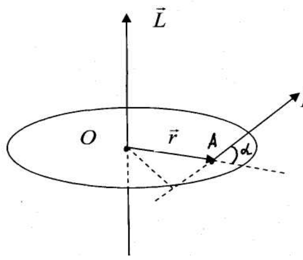


Рисунок 11 – Определение направления момента импульса

Моментом импульса материальной точки А относительно неподвижной точки О называется физическая величина равная векторному произведению:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = \vec{r} \times \vec{p} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

L – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.

$$L = rp\sin\alpha = mv \cdot r \cdot \sin\alpha = p \cdot \ell,$$

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{r}\vec{p}}\right),\ \ell \text{ - плечо}$$

Радиус-вектор импульса – это направленный отрезок, соединяющий неподвижную точку с точкой приложения импульса $\vec{p}$.

$[L] = кг \cdot \dfrac{м}{с} \cdot м = \dfrac{кг \cdot м^2}{с}$.

Момент инерции точки и тела.

Момент инерции тела относительно оси называется физическая величина равная сумме произведений масс n точек тела на квадраты из расстояния до рассматриваемой оси.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$$

Если масса непрерывно распределена по объему то:

$$I = \int r^2 dm$$

I – аналогичен массе при поступательном движении, то есть является мерой инертности во вращательном движении, зависит не только от массы тела на и расположения относительно оси вращения.

Инертность (во вращательном движении) – это способность тел приобретать различные угловые ускорения под действием одинаковых вращательных моментов.

Чем меньше I, тем труднее телу сообщить угловое ускорение.

$[I] = 1кг \cdot м^2$

Таблица 1 – Моменты инерции тел правильной геометрической формы

Тело и ось, относительно которой определяется момент инерции	***Момент инерции***
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l: а) ось проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно к стержню; б) ось проходит через конец стержня перпендикулярно к стержню;	$J = \frac{1}{12} ml^2$ $J = \frac{1}{3} ml^2$
Тонкие кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m; маховик радиусом R и массой m, распределенной по ободу. Ось проходит через центр перпендикулярно к плоскости основания.	$J = mR^2$
Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R и массой m. Ось проходит через центр диска перпендикулярно к плоскости основания.	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Однородный шар массой m и радиусом R. Ось проходит через центр шара.	$J = \frac{2}{5} mR^2$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно другой оси параллельной этой определяется по **теореме Штейнера:**

Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + ma^2$$

Основной закон динамики вращательного движения. Суммарный момент сил, действующий на вращающееся тело, прямо пропорционален угловому ускорению, приобретаемому этим телом.

$$M = J\varepsilon,$$

где ε - угловое ускорение, равное $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Сравнительная таблица физических величин поступательного и вращательного движений

Таблица 2 – Сравнительная таблица физических величин

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m	Момент инерции I
Скорость $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{w} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{w}}{dt}$
Сила $\vec{F}$	Момент сил $\vec{M}$
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = I\vec{w}$
Основные уравнения динамики $\vec{F} = m\vec{a}$	Основные уравнения динамики $M = I\vec{\varepsilon}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Вопросы для проверки знаний:

1. Дайте определение момента импульса, запишите формулу в векторном и скалярном виде, сделайте рисунок, укажите направление и единицу измерения.
2. Дайте определение момента силы, запишите формулу в векторном и скалярном виде, сделайте рисунок, укажите направление и единицу измерения.
3. Дайте определение момента инерции точки, запишите формулу , сделайте рисунок.
4. Дайте определение момента инерции тела, запишите формулы , сделайте рисунок.
5. Укажите физический смысл момента инерции и единицу измерения.
6. Сформулируйте и запишите теорему Штейнера, сделайте пояснительный рисунок.
7. Запишите формулы по которым рассчитываются момент инерции диска, обруча, шара.
8. Запишите формулы по которым рассчитываются момент инерции цилиндра, стержня.

9. Сформулируйте и запишите основной закон динамики вращательного движения.

10. Приведите сравнительную таблицу поступательного и вращательного движения.

4.2 Примеры решения задач

Пример 4. 1:

Диск радиусом R = 20 см и массой m = 7 кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад, где A = 3 рад; B = -1 рад/с; C = 0,2 рад/с^3. Определить действующий на диск момент сил M в момент времени t = 2 с.

Дано: R = 20 см = 0,20 м,m = 7 кг,$\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад,A = 3 рад, B = -1 рад/с,C = 0,2 рад/с^3, t = 2 с

Найти: M

Решение:

1. Согласно основному закону динамики вращательного движения твердого тела

$$M = J\varepsilon,$$

Где J – момент инерции диска относительно оси вращения; ε - угловое ускорение диска.

2. Определим угловое ускорение диска:

а) угловая скорость диска равна:

$$\omega = \varphi' = \left[A + Bt + Ct^3\right]' = B + 3Ct^2, рад/с,$$

б) угловое ускорение диска равно:

$$\varepsilon = \omega' = \varphi'' = \left(B + 3Ct^2\right)' = 6Ct, рад/с^2, \varepsilon = 6 * 0,1 * 2 = 1,2\ рад/с^2.$$

3. Определим момент инерции диска относительно оси вращения:

$$J = \frac{1}{2}mR^2 = 0,5 * 7 * 0,20^2 = 0,14 кг * м^2.$$

4. Получим выражение для момента сил M:

$$M = J\varepsilon = \frac{1}{2}mR^2 * 6Ct = 3mR^2Ct, Н * м,$$

5. Найдем численное значение: $M = 3 * 7 * 0,20^2 * 0,1 * 2 = 0,168\ Н * м$,

Ответ: M = 0,168 Н * м.

Пример 4.2:

Через блок в виде диска, имеющий массу m = 800 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 300 г и m_2 = 600 г.С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Дано: *m = 800 г = 0,8 кг; m_1 = 300 г = 0,3 кг; m_2 = 600 г = 0,6 кг.*

Найти: *a* - ?

Решение:

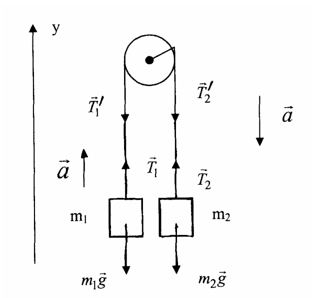


Рисунок 12 – Применение основного закона поступательного и вращательного движений

1. Применим основные законы поступательного и вращательного движения.

На каждый груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вверх.

Запишем закон Ньютона для каждого тела.

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a} \\ \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Найдем проекции этих векторов на ось оу.

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_1 g = -m_1 a \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 = m_1 a + m_1 g \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

2. Согласно основному закону динамики вращательного движения найдем вращающий момент М, приложенный к диску:

$$M = J \cdot \varepsilon \qquad (4.2.3)$$

3. Определим вращающий момент.

Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона, силы $\vec{T}_1'$ *и* $\vec{T}_2'$ приложенные к ободу диска, равны соответственно силам $\vec{T}_1$ *и* $\vec{T}_2$ но противоположны по направлению.

При движение грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелки, следовательно $T_2' > T_1$

Вращающий момент приложенный к диску равен разности моментов этих сил:

$$M = M_2 - M_1 = T_2' \cdot R - T_1' \cdot R,$$

т.к. $\begin{matrix} T_1' = T_1 \\ T_2' = T_2 \end{matrix}$, то $$M = R(T_2 - T_1)$$

4. Момент инерции диска $$J = \frac{1}{2} mR^2.$$

Угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов, как $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$

Подставим в (4.2.3) значения M, I, ε, получим.

$$R(T_2 - T_1) = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \tag{4.2.4}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2}$$

5. Подставим в (4.2.4) значения T_1 и T_2 из (4.2.2)

$$m_2 g - m_2 a - (m_1 g + m_1 a) = \frac{m}{2} a$$

$$(m_2 - m_1) g = (m_2 + m_1 + \frac{m}{2}) a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}$$

Найдем значение: $$a = \frac{(0{,}6 - 0{,}3) \cdot 9{,}8}{0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}4} = 2{,}26\ м/с^2$$

Ответ: a = 2,26 м/с^2.

Пример 4. 3:

Маховик в виде диска массой m = 5 кг и радиусом R = 10 см свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее центр с частотой 360 мин$^{-1}$.Через 20 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

Дано: *m = 5 кг; R = 10 см = 0,1 м; t = 20 с; n = 360 мин$^{-1}$ = 6 с$^{-1}$; $\omega_2 = 0$.*

Найти: *M; N*

Решение:

1. Применим основной закон динамики вращательного движения.

$$M = \frac{\Delta(J \cdot \omega)}{\Delta t}$$

$$\text{или } M \cdot \Delta t = J \cdot \omega_2 - J \cdot \omega_1 \qquad (4.3.1)$$

2. Момент инерции диска относительно его геометрической оси

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

3. Выразим угловую скорость ω через частоту вращения:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

4. Подставим в (4.3.1) выражения для I; ω.

$$M \cdot \Delta t = \frac{mR^2}{2}(0 - 2 \cdot \pi \cdot n); \quad M = -\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot m \cdot R^2}{2}$$

5. Найдем значение M:

$$M = -\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 0.1^2}{2} = -1{,}57\ H \cdot м$$

6. Угол поворота может быть определен по формуле для равнозамедленного вращения маховика.

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot \Delta t^2}{2},$$

где $$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot \Delta t,$$

7. Так как ω=0 и $\omega_0 = \varepsilon \cdot \Delta t$, тогда

$$\varphi = \varepsilon \cdot \Delta t^2 - \frac{\varepsilon \cdot \Delta t^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \Delta t^2}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}$$

8. Так как φ=2πN, то $$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}$$

$$N = \frac{\varepsilon \cdot \Delta t^2}{2\pi} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2\pi} = \frac{n \Delta t}{2}$$

9. Найдем значение: $N = \frac{6 \cdot 20}{2} = 60\ об.$

Ответ: *N = 60 об.*

Пример 4. 4:

По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром D = 75 см и массой m = 40 кг приложена сила F = 1 кН. Определить ε угловое ускорение и частоту вращения n маховика через время t = 10 с после начала действия силы, если радиус r шкива равен 12 см. Силой трения пренебречь.

Дано: *D = 75 см = 0,75 м , m = 40 кг, F = 1 кН =* 10^3 *Н, t = 10 с, r = 0,12 м,* $\omega_1 = 0$

Найти: ε, n_2

Решение:

1. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела:

$$M = J\varepsilon,$$

где M = F * r - вращающийся момент, действующий на тело относительно оси вращения;
F - сила, приложенная по касательной к шкиву радиусом r;

$$J = \frac{1}{2}mR^3 = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mD^2 \text{ -}$$

момент инерции диска определяем по таблице (1);

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \text{ - угловое ускорение диска;}$$

ω_1 и ω_2 – соответственно начальная и конечная угловые скорости диска, связанные с частотой вращения n выражением $\omega = 2\pi n$.

2. С учетом всех пояснений получаем: $F * r = \frac{1}{8}mD^2 * \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{1}{8}mD^2\frac{2\pi n_2}{t} \Rightarrow$

$$F * r = \frac{mD^2\pi n_2}{4t}, \text{отсюда}$$

$$n_2 = \frac{4F * r * t}{mD^2\pi} \text{ или}$$

$$n_2 = \frac{4 * 10^3 * 0{,}12 * 10}{40 * 0{,}75^2 * 3{,}14} = 67{,}9 об/с.$$

3. Определим угловое ускорение маховика:

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{F*r*8}{mD^2} = \frac{10^3*0{,}12*8}{40*0{,}75^2} = 42{,}7\,рад/с^2.$$

Ответы: ε = 42,7 рад/с^2; n_2 = 67,9 об/с.

4.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Тонкостенный цилиндр с диаметром основания D=30 см и массой m=12 кг вращается согласно уравнению $\varphi=A+Bt+Ct^3$, где A=4 рад; B=-2 рад/с; C=0,2 рад/с^3. Определить действующий на цилиндр момент сил M в момент времени t=3 с. *(Ответ: 0,972 Нм)*

2. На обод маховика диаметром D=60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m=2 кг. Определить момент инерции J маховика, если он, вращаясь равноускоренно, под действием силы тяжести груза, за время t=3 с приобрел угловую скоростью ω= 9 рад/с. *(Ответ:1,78 кг*м^2)*

3. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину согласно уравнению $\varphi=At+Bt^3$, где A =2 рад/с; B=0,2 рад/с^3. Определить вращающий момент M, действующий на стержень в момент времени t=2 с, если момент инерции стержня J=0,048 кг·м^2.*(Ответ: 0,1152 Нм)*

4. Определить момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой n=12 с$^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени Δt=8 с. Диаметр блока D=30 см. Массу блока m=6 кг считать равномерно распределенной по ободу.(*Ответ:1,3 Нм)*

5. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом *R=50 см* намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой *m=6,4* кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением *a=2 м/с^2*. Определите момент инерции вала; массу m_1 вала. (*Ответ:6,25 кг · м^2; 50 м.*)

6. К ободу однородного сплошного диска радиусом *R=0,5 м* приложена постоянная касательная сила *F=100 Н*. При вращение диска на него действует момент сил трения $M_{тр}$*=2 Н · м*. Определите массу *m* диска, если известно, что его угловое ускорение постоянно и равно 16 рад/с^2. (*Ответ:24 кг*).

7. Маховик, массу которого m = 5 кг можно считать распределенной по ободу радиусом R = 20 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой n = 720 мин$^{-1}$. при торможении

маховик останавливается через промежуток времени Δt = 20 с. Найти тормозящий момент сил и число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки. (*Ответ:* -0,75 Н \ м; 120).

8. Через блок в виде диска массой m= 900г перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1= 300г и m_2= 500г. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов. (*Ответ:* T_1 *=3,375 Н,* T_2 *=7,875)*

4.4 Домашняя контрольная работа № 4

Вариант I

1. Найти момент инерции *J* тонкого однородного кольца радиусом R=20 см и массой m=100 г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через точку О, находящуюся на расстоянии 5см от его центра.

2. Диск радиусом R = 20 см и массой m = 7 кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад, где A = 3 рад; B = -1 рад/с; C = 0,2 рад/с^3. Определить действующий на диск момент сил M в момент времени t = 2 с.

3. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R=5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m=0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь S=1,8 м за время t=3 с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

4. Через блок массой m=0,5 кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1=0,2 кг и m_2=0,3 кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

Вариант II

1. Найти момент инерции *J* тонкого однородного диска радиусом R=30 см и массой m=200 г относительно оси, лежащей в плоскости диска и проходящей через точку О, находящуюся на расстоянии 10см от его центра.

2. Шар радиусом R = 10 см и массой m = 5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ (B = 2 рад/с^2, C = -0,5 рад/с^3). Определите момент сил M для t = 3 с.

3. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R=6 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m=0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь S=2 м за время t=2 с.

Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

4. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой m_1=100 г и m_2=110 г. С каким ускорением *a* будут двигаться грузики, если масса m блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

Вариант III

1. Определить момент инерции J кольца массой m=50 г и радиусом R=10 см относительно оси, касательной к кольцу.

2. Диск радиусом R = 10 см и массой m = 2 кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад, где A = 5 рад; B = -2 рад/с; C = 0,3 рад/$с^3$. Определить действующий на диск момент сил M в момент времени t = 1 с.

3. Через блок массой m=0,2 кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1=0,3 кг и m_2=0,5 кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

4. Нить с привязанным к ее концам грузами массой m_1 = 50 г и m_2 = 60 г перекинута через блок диаметром D = 4 см. Определить момент инерции J блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение ε = 1,5 рад/$с^2$.

Вариант IV

1. Определить момент инерции J стержня массой m=500г и длиной 110 см относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню на расстоянии 40см от его центра .

2. Кольцо радиусом R = 12 см и массой m = 2 кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад, где A = 5 рад; B = -2 рад/с; C = 0,4 рад/$с^3$. Определить действующий на диск момент сил M в момент времени t = 1 с.

3. Вал массой m=100 кг и радиусом R=5 см вращался с частотой 8 $с^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой

F=40 Н, под действием которой вал остановился через t=10 с. определить коэффициент трения μ.

4. Через блок в виде диска, имеющий массу m = 500 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 200 г и m_2 = 400 г.С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Вариант V

1. Определить момент инерции J стержня массой m=500г и длиной 110 см относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, отстоящую от конца стержня на 1\3 его длины.

2. Стержень длиной L = 20 см и массой m = 4 кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, рад, где A = 3 рад; B = -2 рад/с; C = 0,2 рад/с^3. Определить действующий на диск момент сил M в момент времени t = 2 с.

3. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром D = 75 см и массой m = 40 кг приложена сила F = 1 кН. Определить ε угловое ускорение и частоту вращения n маховика через время t = 10 с после начала действия силы, если радиус r шкива равен 12 см. Силой трения пренебречь.

4. Через блок в виде диска, имеющий массу m = 700 г, которая равномерно распределена по ободу, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 400$ г.С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Тема: Закон сохранения момента импульса и энергии при вращательном движении

5.1 Основные вопросы теории

Закон сохранения момента импульса. Момент импульса твердого тела относительно оси вращения – это векторная физическая величина равная сумме моментов импульсов отдельных его частиц:

$$\vec{L} = \vec{\omega}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = J\vec{\omega},$$

где J - момент инерции твердого тела относительно оси вращения; $\vec{\omega}$ - угловая скорость тела.

Момент импульса – вектор, совпадающий по направлению с вектором угловой скорости.

Закон сохранения момента импульса: векторная сумма моментов импульсов всех тел изолированной системы сохраняется неизменной:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = const,$$

где $\vec{L}_i$ - момент импульса тела с номером i, входящего в состав системы;

Для одного тела, момент инерции которого может меняться, данный закон имеет вид:

$$J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2,$$

где J_1 и J_2 - начальное и конечное значения момента инерции тела; ω_1 и ω_2 - начальная и конечная угловые скорости тела;

Для двух тел данный закон имеет вид:

$$J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2 = J_1'\vec{\omega}_1' + J_2'\vec{\omega}_2',$$

где J_1, J_2, ω_1, ω_2 - моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1', J_2', ω_1' ω_2' - те же величины после взаимодействия.

Закон сохранения момента импульса выполняется в следующих случаях:

– на вращающиеся тела не действуют внешние силы ;

– суммарный момент внешних сил, действующих на систему тел относительно оси, равен нулю.

Работа момента силы и энергия вращающегося тела. Работа постоянного момента силы, действующего на вращающееся тело:

$$A = M\varphi,$$

где φ - угол поворота тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ω - угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения тела; v - скорость центра инерции тела; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение кинетической энергии его связаны соотношением

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

Сравнительная таблица поступательного и вращательного движений

Таблица 3 – сравнительная таблица физических величин

№ п.п.	Поступательное движение	Вращательное движение
	Работа и мощность	
1	$A = FS\cos\alpha$	$A = M\varphi$
2	$A = \int_1^2 F_S dS$	$A = \int_1^2 M d\varphi$
3	$N = F\upsilon\cos\alpha$	$N = M\omega$
	Кинетическая энергия	
4	$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$	$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$

№ п.п.	Поступательное движение	Вращательное движение
5	Импульс тела $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса тела $\vec{L} = J\vec{\omega}$
	Закон сохранения	
6	Импульса $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = const$	Момент импульса $\sum_{i=1}^{N} J_i\vec{\omega}_i = const$

Вопросы для проверки знаний:

1. Дайте определение момента импульса, запишите формулу в векторном и скалярном виде, сделайте рисунок, укажите направление и единицу измерения.
2. Сформулируйте и запишите закон сохранения момента импульса.
3. Запишите закон сохранения импульса для одного тела.
4. Запишите закон сохранения импульса для двух тел.
5. Запишите формулу работы постоянного момента силы . Назовите все физические величины, входящие в формулу и укажите их единицы измерения.
6. Запишите формулу мощности постоянного момента силы . Назовите все физические величины, входящие в формулу и укажите их единицы измерения.
7. Запишите формулу кинетической энергии вращающегося тела. Назовите все физические величины, входящие в формулу и укажите их единицы измерения.
8. Запишите формулу кинетической энергии тела, катящегося по плоскости без скольжения . Назовите все физические величины, входящие в формулу и укажите их единицы измерения.
9. Как связаны работа, совершаемая при вращении тела, и изменение кинетической энергии ?
10. Приведите сравнительную таблицу поступательного и вращательного движения.

5.2 Примеры решения задач

Пример 5.1:

Платформа в виде сплошного диска радиусом $R=1,5$ *м* и массой $m_1=180$ *кг* вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n=10$ *мин*$^{-1}$.В центре платформы стоит человек массой $m_2=60$ *кг*. Какую линейную скорость υ относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Дано: $n=10$ *мин*$^{-1}$, $R=1{,}5$ *м*, $m_1=180$ *кг*, $m_2=60$ *кг*.

Найти: υ.

Решение:

1. Платформа вращается по инерции. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения Z, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L_z системы платформа–человек остается постоянным:

$$L_z = J_z\omega = const, \tag{5.1.1}$$

где J_z–момент инерции платформы с человеком относительно оси Z; ω–угловая скорость платформы.

2. Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому

$$J_z = J_1 + J_2,$$

где J_1 и J_2–моменты инерции платформы и человека.

С учетом этого равенство (5.1.1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = const,$$

или

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega' \tag{5.1.2}$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 относятся к начальному состоянию системы; J_1' *и* J_2'–к конечному.

3. Момент инерции платформы относительно оси $\boldsymbol{Z}$ при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J_1' = \frac{1}{2}m_1R^2.$$

4. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции $\boldsymbol{J_2}$ в начальном положении (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном положении (на краю платформы) момент инерции человека

$$J_2' = m_2R^2.$$

Подставим в формулу (5.1.2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком *($\omega=2\pi n$)* и конечной угловой скорости $\omega' = \frac{\upsilon}{R}$, где υ - скорость человека относительно пола:

$$(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0)2\pi \cdot n = (\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2)\frac{\upsilon}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot n \cdot R \cdot m_1}{m_1 + 2m_2}$$

5. Произведем вычисления:

$$\upsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60}\ м/с = 1\ м/с$$

Ответ: *1 м/с*

Пример 5.2:

На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4 рад/с$. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 5кг \cdot м^2$. Длина стержня $\ell = 1{,}8м$, масса $m = 6кг$. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы.

Дано: $\omega_1 = 4 рад/с, J = 5кг \cdot м^2, \ell = 1{,}8м, m = 6кг$

Найти: ω_2.

Решение:

1. Вокруг оси скамьи вращаются три тела: скамья, человек и стержень. Покажем на рисунке два положения системы вращающихся тел относительно ос и векторы угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ соответственно направлению вращения по правилу буравчика.

2. Считая систему этих тел замкнутой, т.е. моменты всех внешних сил равны, т.к. трением пренебрегаем, можно применить к ней закон сохранения момента импульса:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N}J_i\omega_i = const,$$

Или в проекции на ось вращения в скалярном виде, учитывая, что все тела вращаются до взаимодействия с угловой скоростью ω_1, а после взаимодействия – с угловой скоростью ω_2:

$$L_1 + L_2 + L_3 = L_1' + L_2' + L_3' \text{ или}$$

$$(L_1 + L_2 + L_3) \cdot \omega_1 = (L_1' + L_2' + L_3') \cdot \omega_2,$$

откуда получаем

$$\omega_2 = \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{(L_1' + L_2' + L_3')} \cdot \omega_1, \qquad (5.2.1)$$

где $L_1 + L_{23} = L_1' + L_2' = L$ - суммарный момент инерции человека и скамьи; $L_3 = 0$ - момент инерции стержня в положении 1, т.к. радиус вращения точек стержня относительно оси равен нулю; $J_3' = \frac{1}{12} m\ell^2$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно его длине.

3. С учетом пояснений выражение (5.2.1) принимает вид:

$$\omega_2 = \frac{J}{J + \frac{1}{12} m\ell^2} \cdot \omega_1$$

4. Подставив числовые значения, получаем

$$\omega_2 = \frac{5 \cdot 4}{5 + \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 1{,}8^2} = \frac{5 \cdot 4}{6{,}62} = 3{,}0\, рад/с\,.$$

Отметим, что $\omega_2 < \omega_1$, т.к. с изменением положения стержня увеличивается суммарный момент инерции всей вращающейся системы тел.

Ответ: $\omega_2 = 3{,}0\, рад/с$.

Пример 5. 3:

Стержень, длиной *ℓ=1,5 м* и массой *m=10 кг* может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой *m=10 г*, летящая в горизонтальном направлении со скоростью V_0*=500 м/с*, и застревает в стержне. На какой угол *φ* отклонится стержень после удара?

Дано: *ℓ=1,5 м; m=10 кг; m=10 г;* V_0*=500 м/с.*

Найти: ***φ*.**

Решение:

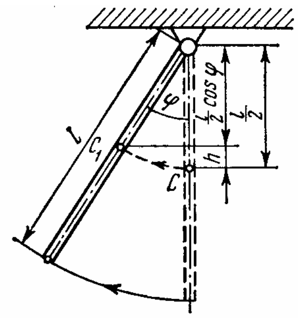


Рисунок 13 – Отклонение стержня при попадании пули

1. Стержень поворачивается на угол φ, причем центр масс его поднимается на высоту

$$h = \frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi)$$

и в этом положении стержень будет обладать потенциальной энергией:

$$П = M \cdot g\frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi).$$

2. По закону сохранения энергии

$$\frac{J \cdot \omega^2}{2} = M \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Откуда $$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{M \cdot g \cdot \ell},$$

где J – момент инерции стержня. Найдем J по теореме Штейнера:

$$J = J_0 + M \cdot a^2,$$

где $J_0 = \frac{1}{12}M \cdot \ell^2;\quad a = \frac{\ell}{2} \cdot J = \frac{1}{12}M \cdot \ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M \cdot \ell^2.$

3. При ударе пули о стержень выполняется закон сохранения момента импульса, т.к. момент внешних сил равен 0.

В начальный момент времени угловая скорость $\omega_0 = 0$, значит

$$h_{01} = J\omega_0 = 0.$$

Пуля, углубляясь в стержень, сообщила ему угловое ускорение. Начальный момент импульса пули $L_{02} = m\upsilon_0 r$, где r – расстояние точки попадания от оси вращения.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость υ, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения.

Т.к. $\upsilon = \omega \cdot r$, то $L_2 = m \cdot \upsilon \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega$.

Применим закон сохранения импульса:

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2$$
$$0 + m\upsilon_0 r = J\omega + mr^2\omega$$
$$\omega = \frac{mV_0 r}{J + m \cdot r^2}$$

где $r = \frac{\ell}{2}$, $mr^2 < J$

$$\omega = \frac{3\, m\, V_0}{2M\ \ell}$$

Подставим численные значения

$$\omega = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{2 \cdot 10 \cdot 1{,}5} = 0.5\ рад$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{1{,}5 \cdot 0{,}5^2}{3 \cdot 9{,}81} = 0.987$$
$$\varphi = 9^0 20^{\prime}$$

Ответ: $\varphi = 9^0 20^{\prime}$

Пример 5.4:

Колесо радиусом R=30 см и массой m=3 кг скатывается без трения по наклонной плоскости длиной ℓ=5 м и углом наклона α=25^0. Определите момент инерции колеса, если его скорость V в конце движения составляет 4,6 м/с.

Дано: *R=30 см=0,3 м; m=3 кг; ℓ=5 м;* $\alpha = 25^0$; $V_0 = 0$; *V=4,6 м/с.*

Найти: *I.*

Решение:

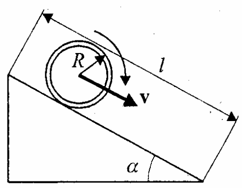


Рисунок 14 – Движение тела по наклонной плоскости

1. Применим закон сохранения энергии для данной системы тел, учитывая, что колесо скатывается без трения

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2} \qquad (5.4.1)$$

где *mgh*–потенциальная энергия колеса в начале наклонной плоскости;

$\frac{m\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения колеса в конце наклонной плоскости;

$\frac{J \cdot \omega^2}{2}$– кинетическая энергия вращательного движения колеса в конце наклонной плоскости.

2. Выразим высоту h=ℓ·sinα и воспользуемся связью между линейной и угловой скоростью

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}$$

3 Подставим эти выражения в (5.4.1):

$$mgh - \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$mg\ell \sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{J\upsilon^2}{2R^2}$$

Откуда

$$J = \frac{2R^2}{\upsilon^2}\left(mg\ell \sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{2}\right) = mR^2\left(\frac{2g\ell \sin\alpha}{\upsilon^2} - 1\right)$$

4. Подставим численные значения

$$J = 3 \cdot 0{,}3^2\left(\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot \sin 25^0}{4{,}6^2}\right) = 0{,}259\ кг \cdot м^2$$

Ответ: *J=0,259 кг·м*^{2}

Задачи для самостоятельного решения

1. На краю платформы в виде диска диаметром D=2 м, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n_1=8 мин$^{-1}$, стоит человек массой m_1=70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой n_2=10 мин$^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.(*Ответ:560 кг)*

2. По горизонтальной, плоской поверхности катится диск со скоростью v=8 м/с. Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь S=18 м. *(Ответ: 0,27)*

3. Шарик массой m=60 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1,2 м, вращается с частотой n_1=2 $с^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,6 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь. *(Ответ: n_2 =8 $с^{-1}$, 20,5 Дж)*

4. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определите, как и во сколько раз измениться угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. (*Ответ:* $\frac{\omega_2}{\omega_1}$=1,43).

5. Вентилятор вращается с частотой n=600об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав N=50 оборотов, остановился. Работа сил торможения равна А=31,4Дж. Определите: 1)момент М сил торможения; 2) момент J инерции вентилятора.

(*Ответ:* 0,1 Н·м; 1,59·10^{-2}кг·$м^2$).

6. Маховик вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где А=2рад, В=32 рад/с, С=-4рад/$с^3$. Найти среднюю мощность <N>, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, его момент инерции J=100кг·$м^2$.(*Ответ:* 12,8кВт).

7. Определите линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой h=1м. (*Ответ:* 3,74м/с).

8. Человек стоит на скамейке Жуковского и ловит руками мяч массой $m = 0{,}4$ кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с. Траектория меча проходит на расстоянии $r = 0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамейки. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамейка Жуковского с человеком, поймавшим мяч? Считать, что суммарный момент

инерции человека и скамейки J=6кг·м^2. (*Ответ:* 1,02 рад/с).

9. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения $n_1 = 0{,}5$ об/с. Момент инерции J_0 человека относительно оси вращения равен 1,6 кг·м^2. В вытянутых в сторону руках человек держит по гире массой $m = 2$ кг каждая. Расстояние между гирями $\ell_1 = 1{,}6$ м. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки на расстояние ℓ_2 между гирями станет равным 0,4м. Моментом инерции скамьи пренебречь. (*Ответ:* 1,18 об/с).

10. Сплошной диск массой m = 2 кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость υ оси цилиндра равна 2 м/с. Определить полную кинетическую энергию цилиндра.(*Ответ:6 Дж)*

5.4 Домашняя контрольная работа № 5

Вариант I

1. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной ℓ=2,4 м и массой m=8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой n_1=1 с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2.

2. Шарик массой m=200 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1,2 м, вращается с частотой n_1=3 с$^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,7 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3. Маховик вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где A=2рад, B=16 рад/с, C=-2рад/с^3. Момент инерции маховика равен J=50кг·м^2. Найти законы по которым меняются вращающий момент M и мощность N.

4. Якорь двигателя вращается с частотой n=1500мин$^{-1}$. Определить вращающий момент, если двигатель развивает мощность N=500Вт.

5. Сплошной цилиндр массой $m = 4$ кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость υ оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию цилиндра.

Вариант II

1. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг $\cdot$ м^2?

2. Шарик массой m=300 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1,8 м, вращается с частотой n_1=2 $с^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,8 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3. Кольцо вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где А=8рад, В=24 рад/с, С=-2рад/с^3. Найти среднюю мощность <N>, развиваемую силами, действующими на кольцо при его вращении, до остановки, его момент инерции J=150кг·м^2.

4. Маховик в виде диска массой m=80кг и радиусом 30см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту n=10с$^{-1}$?

5. Сколько времени t будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной ℓ = 2 м и высотой h = 10 см?

Вариант III

1. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы стоит человек массой m=60 кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку на платформе? Масса m_2 платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитайте как для материальной точки.

2. Шарик массой m=100 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1 м, вращается с частотой n_1=1 $с^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,5 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться

шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3. Маховик вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где А=3рад, В=34 рад/с, С=-5рад/с^3. Найти среднюю мощность <N>, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, его момент инерции J=200кг·м^2.

4. Маховик в виде полового диска массой m=60кг и радиусом 20см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту n=12с$^{-1}$?

5. Сколько времени t будет скатываться без скольжения диск с наклонной плоскости длиной ℓ = 3 м и высотой h = 12 см?

Вариант IV

1. Платформа в виде сплошного диска радиусом R=2,5 м и массой m_1=150 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n=36 мин$^{-1}$.На краю платформы стоит человек массой m_2=50 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если он перейдет в центр платформы?

2. Шарик массой m=400 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=1 ,4м, вращается с частотой n_1=4 с$^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,6 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3. Диск вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где А=7рад, В=36 рад/с, С=-6рад/с^3. Найти среднюю мощность <N>, развиваемую силами, действующими на диск при его вращении, до остановки, его момент инерции J=100кг·м^2.

4. Маховик в виде диска массой m=70кг и радиусом 24см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту n=15с$^{-1}$?

5. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью 1,5м/с. Определите путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5м на каждые 100м пути.

Вариант V

1. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n= 4 об/с. Момент инерции J_0 человека относительно оси вращения равен 1,2 кг·м^2. В вытянутых в сторону руках человек держит по гире массой m= 3кг каждая. Расстояние между гирями l 1=1,4м. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки, на расстояние ℓ_2 между гирями станет равным 0,6м. Моментом инерции скамьи пренебречь.

2. Шарик массой m=500 г, привязанный к концу нити длиной ℓ_1=2,1 м, вращается с частотой n_1=1 с$^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния ℓ_2=0,8 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу А совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

3. Кольцо вращается по закону, выраженному уравнение $\varphi = A + Bt + Ct^2$, рад, где A=2рад, B=30 рад/с, C=-2рад/с^3. Найти среднюю мощность <N>, развиваемую силами, действующими на кольцо при его вращении, до остановки, его момент инерции J=100кг·м^2.

4. Маховик в виде полого диска массой m=50кг и радиусом 15см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту n=14с$^{-1}$?

5. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1м.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема: Гармонические колебания. Сложение колебаний

6.1 Основные вопросы теории

Колебания. Виды колебаний.

Колебание – это движение, отличающееся той или иной степенью периодичности.

Свободные колебания – это колебания, которые возникают под действием внутренних сил, после того как систему выведут из положения равновесия и система предоставлена самой себе. Данные колебания – затухающие. Они не затухают, если отсутствует сила трения.

Вынужденные колебания – это колебания, которые происходят под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Колебанием – называется всякое движение, при котором физические величины, характеризующие его, изменяясь, повторяются со временем.

В зависимости от времени делятся на 3 вида:

1. периодические
2. почти периодические
3. непериодические

Гармонические колебания – это периодические колебания, происходящие по закону $\sin$ или $\cos$

$$x = A\sin(w_0 t + \alpha_0)$$

$$v = x' = Aw_0\cos(w_0 t + \alpha_0) = v_{\max}\sin(w_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = x'' = -Aw^2\sin(w_0 t + \alpha_0)$$

A – **амплитуда колебаний** – модуль наибольшего смещения точки от положения равновесия;

$(w_0 t + \alpha_0)$ – **фаза**;

α_0 – **начальная фаза колебаний**, фаза в начальный момент времени.

Т – **период** – время полного колебания.

$w_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, где $T = \dfrac{1}{n}$, n – **частота**, число колебаний за 1секунду

$w_0 = 2\pi n$ – **циклическая частота**, число колебаний за 2π секунд.

$[n] = 1 Гц$;

$[w] = 1 \frac{рад}{с}$.

При наибольшем отклонении, система имеет только потенциальную энергию.

$$E = U_{\max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mw_0^2 A^2}{2}$$

При прохождении системы через положение равновесия она обладает только кинетической энергией.

$$E = T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2 w^2}{2} \quad v_{\max} = Aw_0$$

В любой момент траектории:

$$E = U + T = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m_0 w_0^2 A^2 \sin^2 w_0 t}{2} + \frac{m_0 w_0^2 A^2 \cos^2 w_0 t}{2} = \frac{m_0 w_0^2 A^2}{2} (\sin^2 w_0 t + \cos^2 w_0 t)$$

При отсутствии сил трения выполняется закон сохранения энергии.

Сложение гармонических колебаний

I. Сложение колебаний одного направления

Пусть точка участвует в 2-х гармонических колебаниях, происходящих в одной плоскости вдоль одной прямой, с одинаковой частотой и Т, но с различными начальными фазами и амплитудами.

$$① \begin{cases} x_1 = A_1 \cos(w_0 t + \alpha_{01}) \\ x_2 = A_2 \cos(w_0 t + \alpha_{02}) \end{cases}$$

Результирующие смещение точки:

$$x = A \cos(w_0 t + \alpha_0)$$

1). $tg\alpha_0 = \frac{OB}{BC} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin\alpha_{01} + A_2 \sin\alpha_{02}}{A_1 \cos\alpha_{01} + A_2 \cos\alpha_{02}}$

α_0 - начальная фаза результирующего колебания.

2). $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_{02} - \alpha_{01})$

$\alpha_{02} - \alpha_{01} = \Delta\alpha_0$ - сдвиг по фазе между 1 и 2 колебаниями.

II. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть точка участвует одновременно в двух перпендикулярных колебаниях, с одинаковой частотой.

$$\begin{cases} x = A\cos(w_0 t) \\ y = B\cos(w_0 t + \alpha_{02}) \end{cases}$$

$w_0 = const$,

α_0 - сдвиг по фазе между 1 и 2 колебаниями.

Чтобы получить уравнение траектории нужно из системы исключить t.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha_0 + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2\alpha_0$$

Вопросы для проверки знаний:

1. Что такое колебания? свободные колебания? вынужденные колебания?
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Дайте определение амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Запишите зависимость координаты, скорости, ускорения от времени для гармонических колебаний.
5. От каких величин зависит полная энергия тела, совершающего гармонические колебания? кинетическая энергия? потенциальная энергия?
6. Что называется математическим маятником? пружинным маятником? физическим маятником?
7. Напишите формулы для периодов колебаний математического . пружинного, физического маятников. Сделайте пояснительные рисунки и объясните все величины, входящие в формулы.
8. Изобразите векторную диаграмму сложения гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.
9. Запишите уравнение результирующего колебания при сложении колебаний одного направления, формулу амплитуды и начальной фазы результирующего колебания .
10. Запишите уравнение траектории результирующего колебания при сложении двух гармонических колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.

6.1 Примеры решения задач

Пример 6. 1:

Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A=10 см и периодом T=5 с. Определите для точки: 1) максимальную скорость; 2) максимальное ускорение.

Дано: *A=10 см=0,1 м; T=5 с*

Найти: υ_{max}; a_{max}.

Решение:

1. Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

2. Скорость является первой производной от смещения по времени:

$$\upsilon = x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A \cdot \omega_0 = \upsilon_{\max}$ $\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, тогда $\upsilon_{\max} = \dfrac{A \cdot 2\pi}{T}$

3. Подставим численные значения:

$$\upsilon_{\max} = \frac{0{,}1 \cdot 2 \cdot 3{,}14}{5} = 0{,}13\ м/с.$$

4. Ускорение является первой производной от скорости по времени:

$$a = \upsilon' = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A \cdot \omega_0^2 = a_{\max}$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, тогда $a_{\max} = \dfrac{A \cdot 4\pi^2}{T^2}$

5. Подставим численные значения:

$$a_{\max} = \frac{0{,}1 \cdot 4 \cdot 3{,}14^2}{25} = 0{,}16\ м/с^2.$$

Ответ: *0,16 м/с*^{2}

Пример 6.2:

Тело массой m=10 г. совершает гармонические колебания по закону: $x = 0{,}1\cos(4\pi \cdot t + \dfrac{\pi}{4}), м$. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

Дано: $x = 0{,}1\cos(4\pi \cdot t + \dfrac{\pi}{4}), м$; *m=10 г=0,01 кг.*

Найти: F_{max}; T_{max}.

Решение:

1 Уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.2.1)$$

Сравнивая $x = 0{,}1\cos(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4})$ с (6.2.1) определяем значения: $A = 0{,}1\ м \quad \omega_0 = 4\pi\ \frac{рад}{с} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

2 Чтобы найти значение максимальной кинетической энергии по формуле:

$$T_{\max} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$$

определим закон изменения скорости колеблющейся частицы:

$\upsilon = x' = -0{,}1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \sin(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}),$

$где\ \upsilon_{\max} = -0{,}4\pi\ м/с$

3. Тогда $T_{\max} = \frac{m \cdot (-0{,}4\pi)^2}{2} = \frac{0{,}16\pi^2 \cdot m}{2} = 0{,}8\pi^2 \cdot m$.

Подставим численные значения:

$T_{\max} = 0{,}8 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}08\ Дж$.

4. Чтобы найти значение максимальной силы по формуле: $F_{\max} = ma_{\max}$ определим закон изменения ускорения колеблющейся частицы:

$a = \upsilon' = -1{,}6 \cdot \pi^2 \cdot \cos(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}),\ где\ a_{\max} = -1{,}6\pi^2\ м/с^2$ Тогда $F_{\max} = -1{,}6\pi^2 m$.

5. Подставим численные значения:

$F_{\max} = -1{,}6 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}16\ Н$.

Ответ: *F_{max}=0,16 Н; T_{max}=0,08 Дж.*

Пример 6.3:

Тонкий однородный стержень длиной ℓ=60 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии x=15 см от его середины. Определите период колебания стержня, если он совершает малые колебания.

Дано: *ℓ=60 см=0,6 м; x=15 см=0,15 м.*

Найти: *T*.

Решение:

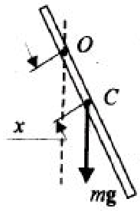


Рисунок 15 – Вращение однородного стержня

1. Период колебаний физического маятника определяется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

где ***J***–момент инерции стержня относительно произвольной оси проходящей через точку 0 отстоящей от центра масс стержня на расстояние *a*=*x*.

2. Определим его по теории Штейнера:

$$J_0 = J_c + mx^2$$

где $J_c = \frac{1}{12}m\ell^2$–момент инерции стержня относительно оси проходящей через центр масс.

3. Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}m\ell^2 + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\ell^2 + x^2}{gx}}$$

4. Подставим численные значения:

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}6^2 + 0{,}15^2}{9{,}8 \cdot 0{,}15}} = 1{,}19\,\text{с.}$$

Ответ: *T=1,19 с.*

Пример 6.4:

Однородный диск радиусом *R*=20 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии ℓ=15 см от центра диска. Определите период колебания диска относительно этой оси.

Дано: *ℓ=15 см=0,15 м; R=20 см=0,2 м.*

Найти: *T*.

Решение:

1. Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

где ***J***–момент инерции диска относительно произвольной оси проходящей через точку 0 отстоящей от центра масс диска на расстояние *a=ℓ*.

2. Определим его по теореме Штейнера:

$$J_0 = J_c + m\ell^2$$

где $J_c = \frac{mR^2}{2}$–момент инерции диска относительно оси проходящей через центр масс.

3. Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_c + m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mR^2}{2} + m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{R^2}{2} + \ell^2}{g\ell}}$$

4. Подставим численные значения:

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{\frac{0{,}2^2}{2} + 0{,}15^2}{9{,}8\cdot 0{,}15}} = 1{,}07\,\text{с}.$$

Ответ: *T=1,07 с.*

Пример 6. 5:

Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1\cos\omega(t+\tau_1)$; $x_2 = A_2\cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1 = 1см$, $A_2 = 2см$, $\tau_1 = 1/6\,c$, $\tau_2 = 1/2\,c$, $\omega = \pi c^{-1}$. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний . 2.Найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Дано: $x_1 = A_1\cos\omega(t+\tau_1)$; $x_2 = A_2\cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1 = 1см$, $A_2 = 2см$, $\tau_1 = 1/6\,c$, $\tau_2 = 1/2\,c$, $\omega = \pi c^{-1}$.

Найти: А, φ_1, φ_2

Решение:

1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \qquad (6.5.1)$$

2. Преобразуем уравнения, заданные в условиях задачи, к такому же виду:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \omega\tau_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \omega\tau_2) \qquad (6.5.2)$$

3. Из сравнения выражений (6.5.2) с равенством (6.5.1) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \pi/6$ рад и $\varphi_2 = \omega\tau_2 = \pi/2$ рад.

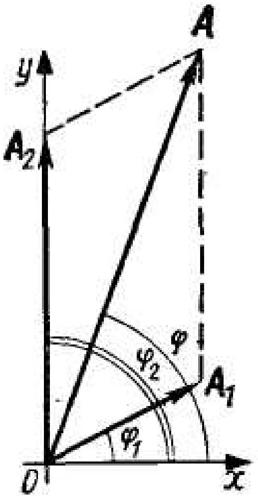


Рисунок 16 – Векторная диаграмма

4. Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рисунке 16.

Согласно теореме косинусов, получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}, \qquad (6.5.3)$$

где $\Delta\varphi$ - разность фаз составляющих колебаний.

Так как $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то, подставляя найденные значения φ_1 и φ_2, получим $\Delta\varphi = \pi/3$ рад.

5. Подставим значения A_1, A_2 и $\Delta\varphi$ в формулу (6.5.3) произведем вычисления : $A = 2{,}65 см$.

Тангенс начальной фазы φ результирующего колебания определим непосредственно из рисунка 16:

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi = arctg \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

6. Подставим значения A_1, A_2, φ_1, φ_2 и произведем вычисления:

$$\varphi = arctg(5/\sqrt{3}) = 70{,}9^0 = 0{,}394\pi \text{ рад.}$$

Так как угловые частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь туже частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 2{,}65 см$, $\omega = \pi c^{-1}$, $\varphi = 0{,}394\pi$ рад.

Ответ: $A = 2{,}65 см$, $\varphi = 0{,}394\pi$.

Пример 6.6:

Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях гармонических колебаниях, уравнения которых

$$x = A_1 \cos\omega t, \tag{6.6.1}$$

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t, \tag{6.6.2}$$

где $A_1 = 1 см$, $A_2 = 2 см$, $\omega = \pi c^{-1}$. Найдите уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Дано: $x = A_1 \cos\omega t$, $y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t$, $A_1 = 1 см$, $A_2 = 2 см$, $\omega = \pi c^{-1}$

Найти: уравнение траектории точки .

Решение:

1. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время τ из заданных уравнений (6.6.1) и (6.6.2). Для этого воспользуемся формулой

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1/2)(1+\cos\alpha)}.$$

2. В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2} t = A_2\sqrt{(1/2)(1+\cos\omega t)}.$$

Так как согласно формуле (6.6.1) $\cos\omega t = x/A_1$, то уравнение траектории

$$y = A_2\sqrt{(1/2)(1+x/A_1)}.$$

3. Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений (6.6.1) и (6.6.2) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от -1 до +1см по оси Ox и от -2 до +2 см по оси Oy.

4. Для построения траектории найдем по уравнению (6.6.3) значения y, соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1см$, и составим таблицу:

Х, см	-1	-0,75	-0,5	0	+0,5	+1
У, см	0	±0,707	±1	±1,41	±1,73	±2

5. Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (6.6.1) и (6.6.2) (рисунок 17).

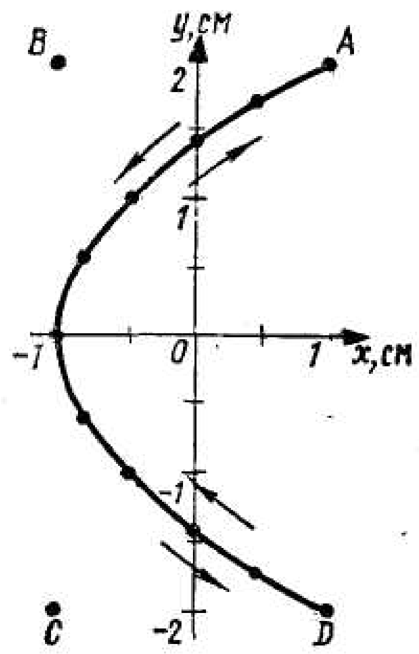


Рисунок 17 – Траектория точки, совершающей колебания

6.Для того чтобы указать уравнение движения точки, проследим за тем, как меняется ее положение с течением времени. В начальный момент $t = 0$ координаты точки равны $x(0) = 1см$ $y(0) = 2см$ и. В последующий момент времени, например при $t_1 = 1с$, координаты точек изменяется и станут равными $x(1) = -1см$, $y(t) = 0$. Зная положение точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рисунке 17 это направление движения указано стрелкой (от точки А к началу координат). После того как в момент $t_2 = 2с$ колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Точка совершает гармонические колебания по закону: $x = 3\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8})$, м. Определите: 1) период колебаний; 2) максимальную скорость точки; 3) максимальное ускорение точки.
(Ответ:4 с; 4,71 м/с; 7,4 м/с^2)

2. Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна 10 пДж, а максимальная сила, действующая на точку, равна 0,5 нН. Напишите уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 4 с, а начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

(*Ответ:* $x = 0{,}04\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})$ *,м*)

3. Однородный диск радиусом R=20 м колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $\ell = 15\ см$ от центра диска. Определите период колебаний диска относительно оси
(*Ответ:*1,06с)

4. На концах тонкого стержня длиной l= 30см укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на d=10см от одного из концов стержня. Определить приведенную длину L и период T колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь. *(50см; 1,42с)*

5. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода, равного 8 с. и одинаковой амплитуды 2 см составляет π/4. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю. (*Ответ:*x = 0,037 (π/4 + π/8))

6.4 Домашняя контрольная работа № 6

Вариант I

1. Определите максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 3 см и угловой частотой (π/2) с$^{-1}$.

2. Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна 0,0050 мкДж, а максимальная сила, действующая на точку, равна 0,2 нН.

Напишите уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 6 с, а начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

3. На конах тонкого стержня длиной 35 см укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку на стержне, удаленную на 5 см от одного из концов стержня. Определите приведенную длину и период колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебрегите.

4. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых $x=A_1\sin\omega_1 t$ $y=A_2\cos\omega_2 t$, где A_1=8 см; A_2=4 см; $\omega_1=\omega_2$=2 $с^{-1}$. Написать уравнение траектории и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

5. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями: $x_1=A_1\sin\omega_1 t$, $x_2=A_2\cos\omega_2 t$, где A_1=3 см; A_2=4 см; $\omega_1=\omega_2$=2 $с^{-1}$. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту v и начальную фазу φ написать уравнение движения. Построить векторную диаграмму для момента времени t=0.

Вариант II

1. Определить возвращающуюся силу F в момент времени t=0,2 с и полную энергию E точки массой m=20 г, совершающей гармонические колебания согласно уравнению $x=A\sin\omega t$, где A=15 см; $\omega=4\pi$ $с^{-1}$.

2. Точка совершает гармонические колебания по закону: $x = 3\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8})$, м. Определите: 1) период колебаний; 2) максимальную скорость точки; 3) максимальное ускорение точки.

3. Определить период колебаний стержня длиной ℓ=30 см около оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

4. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1=A_1\sin\omega_1 t$ и $x_2=A_2\sin\omega_2(t+\tau)$, где $A_1=A_2$=3 см; $\omega_1=\omega_2=\pi$ $с^{-1}$; τ=0,5 с. Определить амплитуду A и начальную фазу результирующего колебания. Написать его уравнение. Построить векторную диаграмму для момента времени t=0.

5. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих согласно уравнениям: $x_1=A_1\cos\omega_1 t$ и $y=A_2\sin\omega_2 t$, где A_1=2 см; ω_1=2 $с^{-1}$; A_2=4 см; ω_2=2 $с^{-1}$.

Определить траекторию точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба, указать направление движения точки.

Вариант III

1. Определить максимальное ускорение a_{max} материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A=15 см, если наибольшая скорость точки v_{max}=30 см/с. Написать также уравнение колебаний.

2. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых x=A sinωt, где A=5 см; ω=2 $с^{-1}$. В момент, когда на точку действовала возвращающая сила F=+5 мН, точка обладала потенциальной энергией П=0,1 мДж. Найти этот момент времени t и соответствующую фазу φ колебаний.

3. Определить частоту ν гармонических колебаний диска радиусом R=20 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

4. Точка совершает одновременно два колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x=A_1\sin\omega_1 t$ $y=A_2\cos\omega_2 t$, где A_1=2 см; ω_1=l $с^{-1}$; A_2=2 см; ω_2=2 $с^{-1}$. Найти уравнение траектории, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения.

5. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями: $x_1=A_1\sin\omega_1 t$, $x_2=A_2\cos\omega_2 t$, где A_1=5 см; A_2=3 см; $\omega_1=\omega_2$=1 $с^{-1}$. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту v и начальную фазу φ написать уравнение движения. Построить векторную диаграмму для момента времени t=0.

Вариант IV

1. Грузик массой 250 г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом 1 с. Определите жесткость пружины.

2. Определить период T гармонических колебаний диска радиусом R=40 см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

3. Найти максимальную кинетическую энергию T_{max} материальной точки массой m=2 г, совершающей гармонические колебания с амплитудой A=4 см и частотой ν=5 Гц.

4. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями; $x_1=A_1\cos\omega_1 t$ и $y=A_2\sin\omega_2 t$, где A_1=4 см; A_2=6 см;

$\omega_1=2\omega_2$. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

5. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями: $x_1=A_1\sin\omega_1 t$, $x_2=A_2\cos\omega_2 t$, где $A_1=2$ см; $A_2=5$ см; $\omega_1=\omega_2=3$ c^{-1}. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту v и начальную фазу φ написать уравнение движения. Построить векторную диаграмму для момента времени t=0.

Вариант V

1. Амплитуда гармонического колебания, совершаемого телом, равна 5см, период 0,1с, масса тела 20г. Найдите: скорость в начальный момент времени; полную энергию тела. Напишите уравнение колебания, если в начальный момент времени смещение было равно половине амплитуды.

2. На стержне длиной $\ell=30$ см укреплены два одинаковых грузика: один—в середине стержня, другой—на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определите приведенную длину L и период T

3. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A=4см. определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость k пружины равна 1кн\м.

4. Материальная точка участвует в двух колебаниях, проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями: $x_1=A_1\sin\omega_1 t$, $x_2=A_2\cos\omega_2 t$, где $A_1=1$ см; $A_2=2$ см; $\omega_1=\omega_2=4$ c^{-1}. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту v и начальную фазу φ написать уравнение движения. Построить векторную диаграмму для момента времени t=0.

5. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями; $x_1=A_1\cos\omega_1 t$ и $y=A_2\sin\omega_2 t$, где $A_1=2$ см; $A_2=3$ см; $\omega_1=2\omega_2$. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Тема: Уравнение состояния идеального газа. Газовые законы. Явления переноса

7.1 Основные вопросы теории

Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Газ называется идеальным, если при рассмотрении его свойств соблюдаются следующие условия:1) соударения молекул такого газа происходит как соударения упругих шаров; 2) размеры молекул пренебрежимо малы; 3) между молекулами не проявляются силы взаимного притяжения.

Уравнение состояния идеального газа связывает термодинамические параметры газа определенной массы и называется **уравнение Клапейрона-Менделеева** :

$$pV = \nu RT$$

где p – давление газа, V – объем газа, R=8,31 Дж\мольК- универсальная газовая постоянная, Т- температура, $\nu = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}_A} = \frac{m}{\mathrm{M}}$ - количество вещества, N– число молекул, N_A – постоянная Авогадро, m – масса вещества, M – молярная масса.

Для смеси газов выполняется закон Дальтона:

$$P_{см}=P_1+P_2+\ldots..P_n$$

Давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в эту смесь.

Парциальное давление газа – это давление которое оказывал бы этот газ при отсутствии других газов смеси.

Число столкновений и средняя длина свободного пробега.

Средняя длина свободного пробега определяет средний путь . который молекула проходит свободно от соударения до соударения .

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы, среднее расстояние между центрами молекул, взаимодействующих как при упругом ударе.

Среднее число соударений за единицу времени определяется по формуле:

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\cdot\pi\ d^2 n\cdot\langle\upsilon\rangle$$

где $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi\ m_0}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\ M}}$ - средняя арифметическая скорость.

Явления переноса. К явлениям переноса относятся диффузия, теплопроводность и внутреннее трение.

1) Процесс выравнивания концентрации молекул в газах, жидкостях и твердых телах называется диффузией.

Уравнение диффузии имеет вид:

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dS\ dt$$

где $\dfrac{d\rho}{dx}$ – градиент изменения плотности, dS–элементарная площадка, перпендикулярная оси Ox, dt – бесконечно малое время, в течение которого перемещается вещество, D–коэффициент диффузии .

Коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\ell\rangle,$$

2)Процесс выравнивания температур в различных частях газа, жидкости и твердого тела называется теплопроводностью.

Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$dQ = -\lambda\cdot\frac{dT}{dx}dS\cdot dt,$$

где $\dfrac{dT}{dx}$ – градиент изменения температуры, λ–теплопроводность.

Теплопроводность равна

$$\lambda = \frac{1}{3}c_v\rho\langle\upsilon\rangle\langle\ell\rangle = \eta\cdot c_v,$$

где c_v–удельная изохорная теплоемкость.

3)Процесс выравнивания скоростей слоев газа, жидкости называется внутренним трением или вязкостью.

Сила внутреннего трения имеет вид:

$$dF = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}dS,$$

где η–динамическая вязкость.

Динамическая вязкость равна

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle = D \cdot \rho .$$

Вопросы для проверки знаний:

1. Дайте определение идеального газа.
2. Дайте определение парциального давления газа.
3. Запишите уравнение Клапейрона-Менделеева и назовите все величины, входящие в это уравнение.
4. Сформулируйте и запишите закон Дальтона.
5. Дайте определение и запишите формулу вычисления средней длины свободного пробега. Назовите все величины, входящие в эту формулу.
6. Дайте определение и запишите формулу вычисления среднего числа соударений. Назовите все величины, входящие в эту формулу.
7. Что называется диффузией? Запишите уравнение диффузии и назовите все величины, входящие в это уравнение.
8. Что называется теплопроводность? Запишите уравнение теплопроводности и назовите все величины, входящие в это уравнение.
9. Что называется внутренним трением? Запишите уравнение силы внутреннего трения и назовите все величины, входящие в это уравнение.
10. Сформулируйте физический смысл градиентов скорости, температуры, плотности.

7.2 Примеры решения задач

Пример 7.1:

В сосуде объемом 2 м^3 находится смесь 4 кг гелия и 2 кг водорода при температуре 27^0 С. Определите давление и молярную массу смеси газов.

Дано: V=2 м^3, m_1=4 кг, μ_1=4·10^{-3} кг/моль, m_2=2 кг, μ_2=2·10^{-3} кг/моль, T=300 К.

Найти: P; μ.

Решение:

1. Воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева, применим его к гелию и водороду:

$$p_1 V = m_1 \frac{RT}{\mu_1}; \qquad (7.1.1)$$

$$p_2V = m_2\frac{RT}{\mu_2}, \qquad (7.1.2)$$

где p_1–парциальное давление гелия;

m_1–масса гелия;

μ_1–его молярная масса;

V–объем сосуда;

T–температура газа;

R=8,31 Дж/(моль·К)–молярная газовая постоянная;

p_2–парциальное давление водорода;

m_2–масса водорода;

μ_2–его молярная масса;

2. Под парциальным давлением p_1 и p_2 понимается то давление, которое производил бы газ, если бы он только один находился в сосуде. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси:

$$p = p_1 + p_2. \qquad (7.1.3)$$

3. Из уравнения (7.1.1) и (7.1.2) выразим p_1 и p_2 и подставим в уравнение (7.1.3). Имеем

$$p = \frac{m_1RT}{\mu_1V} + \frac{m_2RT}{\mu_2V} = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}. \qquad (7.1.4)$$

4. Молярную массу смеси газов найдем по формуле

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \qquad (7.1.5)$$

где ν_1 и ν_2–число молей гелия и водорода соответственно.

5. Число молей газов определим по формулам:

$$\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}; \qquad (7.1.6)$$

$$\nu_1 = \frac{m_2}{\mu_2}; \tag{7.1.7}$$

6. Подставляя (7.1.6) и (7.1.7) в (7.1.5), найдем

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2}. \tag{7.1.8}$$

7. Подставляя числовые значения в формулы (7.1.4) и (7.1.8), получаем

$$p = \left(\frac{4\ кг}{4 \cdot 10^{-3}\ кг/моль} + \frac{2\ кг}{2 \cdot 10^{-3}\ кг/моль} \right) \frac{8{,}31\ Дж/(моль \cdot К) \cdot 300}{2\ м^3}.$$

Ответ: p=2493 кПа, μ=3·10^{-3} кг/моль.

Пример 7.2:

.Определить среднюю длину свободного пробега молекул и число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами кислорода. Находящегося в сосуде емкостью 2 л при температуре 27 ^{0}С и давлении 100кПа.

Дано: *V=2 л=2·10^{-3} м^3; μ=32·10^{-3} кг/моль; T=300 К; p=100 кПа=10^5 Па; d=2,9·10^{-10} м.*

Найти: <ℓ>; Z/

Решение:

1.Средняя длина свободного пробега молекул кислорода вычисляется по формуле

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 n}, \tag{7.2.1}$$

где d–эффективный диаметр молекулы кислорода;

n–число молекул в единице объема, которое можно определить из уравнения

$$n = \frac{p}{kT} \tag{7.2.2}$$

где k–постоянная Больцмана.

2. Подставляя (7.2.2) в (7.2.1), имеем

$$\langle \ell \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p} \qquad (7.2.3)$$

3. Число соударений *Z,* происходящих между всеми молекулами за 1 с, равно

$$Z = \frac{1}{2}\langle Z \rangle N, \qquad (7.2.4)$$

где *N*–число молекул кислорода в сосуде объемом $2\cdot10^{-3}$ м^3;

<*Z*>–среднее число соударений молекулы за 1 с.

4. Число молекул в сосуде

$$N = n \cdot V \qquad (7.2.5)$$

5. Среднее число соударений молекул за 1 с равно

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \ell \rangle}, \qquad (7.2.6)$$

где <*v*>–средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot \mu}} \qquad (7.2.7)$$

6. Подставляя в (7.2.4) выражения (7.2.5), (7.2.6) и (7.2.7), находим

$$Z = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{8RT/(\pi \cdot \mu)}\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p}{kT}\frac{p}{kT}V = \frac{2\pi \cdot d^2 p^2 V}{k^2 T^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi \cdot \mu}}.$$

7. Подставляя числовые значения, получим

$$Z = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 2.9^2 \cdot 10^{-20}\ м^2 \cdot 10^{10}\ Па^2\, 2 \cdot 10^{-3}\ м^3}{1.38 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-46}\ Дж^2 \cdot К^{-2} \cdot 9 \cdot 10^4\ К^2} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31\ Дж/(моль \cdot К) \cdot 300\ К}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}\ кг/моль}} =;$$

$$= 9 \cdot 10^{28}\ c^{-1}$$

$$\langle \ell \rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К \cdot 300\ К}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20}\ м^2 \cdot 10^5\ Па} = 3{,}56 \cdot 10^{-8}\ м.$$

Ответ: $Z=9\cdot10^{28}\ c^{-1}$; $\langle\ell\rangle=3{,}56\cdot10^{-8}$ *м.*

Пример 7.3:

Определите коэффициент диффузии и внутреннего трения азота, находящегося при температуре Т=300 К и давлении 10^5 Па.

Дано: $\rho_0=1,25$ *кг/м*^{3}; $\mu=28\cdot10^{-3}$ *кг/моль; Т=300 К;* $p=10^5$ *Па;* $d=3,1\cdot10^{-10}$ *м.*

Найти: D; η.

Решение:

1. Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \cdot \langle \ell \rangle, \tag{7.3.1}$$

где $<v>$–средняя арифметическая скорость молекул, равная

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot \mu}}; \tag{7.3.2}$$

$<\ell>$–средняя длина свободного пробега молекул.

2. Для нахождения $<\ell>$ воспользуемся формулой из решения примера 7.2:

$$\langle \ell \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p} \tag{7.3.3}$$

Подставляя (7.3.2) и (7.3.3) в выражение (7.3.1), имеем

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot \mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi \cdot d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi \cdot d^2 p}\sqrt{\frac{RT}{\pi \cdot \mu}} \tag{7.3.4}$$

3. Коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle \ell \rangle \rho, \tag{7.3.5}$$

где ρ–плотность газа при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. Для нахождения ρ воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Запишем его для двух состояний азота–при нормальных условиях $T_0=273$ *К*, $p=1,01\cdot10^5$ *Па* и в условиях задачи:

$$p_0V_0 = \frac{m}{\mu}RT_0; \quad pV = \frac{m}{\mu}RT \tag{7.3.6}$$

Учитывая, что $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$, $\rho = \frac{m}{V}$, имеем

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0T} \tag{7.3.7}$$

4. Коэффициент внутреннего трения газа может быть выражен через коэффициент диффузии (см. формулы (7.3.1) и (7.3.5)):

$$\eta = D \cdot \rho = D\rho_0 \frac{pT_0}{p_0T} \tag{7.3.8}$$

5. Подставляя числовые значения в (7.3.4) и (7.3.8), получим

$$D = \frac{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К \cdot 300\ К}{3 \cdot 3{,}134 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20}\ м^2 \cdot 10^5\ Па} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31\ Дж/(моль \cdot К) \cdot 300\ К}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}\ кг/моль}} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ м^2/с$$

$$\eta = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ м/с \cdot 1{,}25\ кг/м^3 \frac{10^5\ Па \cdot 273\ К}{1{,}01 \cdot 10^5\ Па \cdot 300\ К} = 5{,}23 \cdot 10^{-5}\ кг/(м \cdot с).$$

Ответ: *$D=4.7 \cdot 10^{-5}$ $м^2/с$; $\eta=5{,}23 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).*

7.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Определить плотность ρ водяного пара, находящегося под давлением p=2,5 кПа при температуре T=250 К. (*Ответ:0,022кг\м^3*)

2. Сколько атомов содержится в ртути: 1) количеством вещества ν=0,2 моль; 2) массой m=1 г? (*Ответ: $1{,}2 \cdot 10^{23}$; $3 \cdot 10^{21}$*)

3. Баллон объемом V=20 л заполнен азотом. Температура T азота равна 400 К. Когда часть азота израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp=200 кПа. Определить массу m израсходованного азота. Процесс считать изотермическим. (*Ответ:0,034 кг*)

4. В комнате объемом 64 $м^3$ находится воздух при 17 ^{0}С. Какая масса воздуха выйдет через форточку, если температура в комнате повышается до 20 ^{0}С? (*Ответ:0,005 кг*)

5. Смесь состоит из водорода с массовой долей w_1= 1/9 и кислорода с массовой долей w_2=8/9. Найти плотность ρ такой смеси газов при температуре T=300 K и давлении p=0,2 МПа. (*Ответ:0,0026 кг\м^3*)

6. В баллоне емкостью 0,8 м^3 находится 2 кг водорода и 2,9 кг азота. Определите давление смеси, если температура окружающей среды 27^{0}C? (*Ответ:3,43 МПа*)

7. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 205 см, если температура газа равна 67^{0}C? Диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм (*Ответ:0,539 Па*)

8. Найдите среднюю длину свободного пробега <l> молекулы азота в сосуде объемом V=5 л. Масса газа m=0.5 г. (*Ответ:0,73*10^{-6} м*)

9. Определите коэффициент теплопроводности азота. Находящегося в некотором объеме при температуре 280К.Эффективный диаметр молекулы азота принять равным 0,38 нм. (*Ответ: 8,25 мВт\м*К*) 10.Определите коэффициент диффузии воздуха при давлении $1 \cdot 10^6$ Па и температуре 27 °C (*Ответ:1,6*10^{-5} м^2 \с*)

7.4 Домашняя контрольная работа № 7

Вариант I

1. В сосуде, имеющим форму шара, радиус которого 0,1 м, находится 56 г азота. До какой температуры можно нагреть сосуд, если его стенки выдерживают давление 5·10 Па ?

2. В баллоне объемом V=15 л находится аргон под давлением p_1=600 кПа и температуре T_1=300 К. Когда из баллона было взято некоторое количество аргона, давление в баллоне понизилось до p_2=400 кПа, а температура установилась T_2=260 К. Определить массу т аргона, взятого из баллона.

3. Смесь водорода и азота общей массой m=290 г при температуре T=600 K и давлении p=2,46 МПа занимает объем V=30 л. Определить массу m_1 водорода и массу m_2 азота.

4. В сосуде емкостью 1 л содержится кислород массой 32 г. Определить среднее число соударений молекул в секунду при температуре 100 К.

5. Определить коэффициент внутреннего трения кислорода при температуре 500 К.

Вариант II

1. Газ при температуре T=309 K и давлении p=0,7 МПа имеет плотность p=12 кг/м^3. Определить относительную молекулярную массу M газа.

2. Два сосуда одинакового объема содержат кислород. В одном сосуде давление p_1=2 МПа и температура T_1=800 K, и другом p_2=2,5 МПа, T_2=200 K. Сосуды соединили трубкой и охладили находящиеся в них кислород до температур T=200 K. Определить установившееся в сосудах давление p.

3. В сосуде объемом V=10 л при температуре T=450 K находится смесь азота массой m_1=5 г и водорода массой m_2=2 г. Определить давление p смеси.

4. В сосуде ёмкостью 1 л находится 4,4 г углекислого газа. Определить среднюю длину свободного пробега молекул.

5. Определить коэффициент внутреннего трения кислорода при температуре 400 K.

Вариант III

1. До какой температуры можно нагреть запаянный сосуд, содержащий 36 г воды, чтобы он не разорвался, если известно, что стенки сосуда выдерживают давление $5 \cdot 10^6$ Па. Объем сосуда 0,5 л.

2. В сосуде объемом V=40 л находится кислород. Температура кислорода T=300 K. Когда часть кислорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp=100 кПа. Определить массу m израсходованного кислорода, если температура газа в баллоне осталась прежней.

3. Смесь азота с массовой долей w_1=87,5 % и водорода с массовой долей w_2=12,5 % находится в сосуде объемом V=20 л при температуре T=560 K. Определить давление p смеси, если масса т смеси равна 8 г.

4. Определить среднюю длину и среднюю продолжительность свободного пробега молекул углекислого газа при температуре 200 K и давлении 1,38 Па.

5. Определить коэффициент диффузии азота при давлении $0,5 \cdot 10^5$ Па и температуре 127^0C.

Вариант IV

1. Определить плотность ρ насыщенного водяного пара в воздухе при температуре T=300 K. Давление p насыщенного водяного пара при этой температуре равно 3,55 кПа.

2. Определить относительную молекулярную массу M_r, газа, если при температуре T=154 K и давлении p=2,8 МПа он имеет плотность ρ=6,1 кг/м^3.

3. В баллоне объемом V= 22,4 л находится водород при нормальных условиях. После того как в баллон было дополнительно введено некоторое количество гелия, давление в баллоне возросло до p=0,25 МПа, а температура не изменилась. Определить массу m гелия, введенного в баллон.

4. В сосуде емкостью 1 л содержится кислород массой 32 г. Определить среднее число соударений молекул в секунду при температуре 200 К.

5. Коэффициент внутреннего трения кислорода при нормальных условиях равен $1{,}9\cdot10^{-4}$ Па с. Определить коэффициент теплопроводности кислорода.

Вариант V

1. Вычислить плотность ρ азота, находящегося в баллоне под давлением p=2 МПа при температуре T=400 K.

2. В баллоне вместимостью V=25 л находится водород при температуре T=290 K. После того, как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp=0,4 МПа. Определить массу m израсходованного водорода.

3. Один баллон объемом V_1=10 л содержит кислород под давлением p_1=1,6 МПа, другой баллон объемом V_2=22 л содержит азот под давлением p_2=0,6 МПа. Оба баллона были соединены между собой и оба газа смешались, образовав однородную смесь (без изменения температуры). Найти парциальные давления p_1 и p_2 обоих газов в смеси и полное давление p смеси.

4. В сосуде ёмкостью 1 л находится 8,8 г углекислого газа. Определить среднюю длину свободного пробега молекул.

5. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $9{,}1\cdot10^{-5}$ м^2/с. Определить коэффициент теплопроводности водорода

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Тема: Физические основы термодинамики

8.1 Основные вопросы теории

Внутренняя энергия идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа определяется кинетической энергией движения всех его молекул .

Средняя энергия движения одной молекулы равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$$

Для любой массы газа, то есть для любого числа молей, внутренняя энергия вычисляется по формуле:

$$U = \frac{i}{2} \nu \ RT$$

Работа в термодинамике. Работа, совершаемая газом при расширении в различных процессах рассчитывается по формулам:

1) При изохорном процессе работа равна 0.

2) При изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1) = \nu \cdot R(T_2 - T_1)$$

3) При изотермическом процессе

$$A = \nu \cdot RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu \cdot RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

4) При адиабатном процессе

$$A = \nu \cdot C_v (T_1 - T_2) = = \frac{\nu \cdot RT_1}{(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = = \frac{p_1 V_1}{(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$: $C_v = \frac{i}{2} R$ - молярная теплоемкость при постоянном объеме;

$C_p = \frac{(i+2)}{2} R$ - молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Первое начало термодинамики. Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии в тепловых процессах: количество теплоты, переданное системе (газу) в процессе изменения ее состояния, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил.

$$dQ = dU + dA$$

где $dU = \nu \cdot C_v dT$ - изменение внутренней энергии;

$dA = pdV$ - элементарная работа газа.

Коэффициент полезного действия тепловых двигателей. Коэффициент полезного действия тепловых двигателей определяется по формулам:

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}$$

где Q и T–количество теплоты, полученное от нагревателя и его температура; Q_0 и T_0–количество теплоты, переданное холодильнику и его температура

Вопросы для проверки знаний:

1. Дайте определение и запишите формулу вычисления внутренней энергии идеального газа. Назовите все величины, входящие в эту формулу.
2. Дайте определение работы идеального газа. Как можно определить работу газа графически?
3. Чему равна работа газа при изохорном процессе? Ответ поясните с помощью графика процесса.
4. Запишите формулу вычисления работы газа при изобарном процессе. Ответ поясните с помощью графика процесса.
5. Запишите формулу вычисления работы газа при изотермическом процессе. Ответ поясните с помощью графика процесса.
6. Запишите формулы вычисления работы газа при адиабатном процессе. Назовите все величины, входящие в эти формулы.
7. Дайте определения и запишите формулы вычисления теплоемкости, удельной теплоемкости, молярной теплоемкости. Укажите их единицы измерения.
8. Запишите уравнение Майера. Сформулируйте физический смысл универсальной газовой постоянной R.
9. Сформулируйте и запишите формулу первого начала термодинамики.
10. Запишите первое начало термодинамики для изопроцессов и для адиабатного процесса.

8.2 Примеры решения задач

Пример 8.1:

Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в 2 кг водорода при температуре 400 К?

Дано: m=2 кг, T=400 К, $\mu=2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $\langle\varepsilon_{пост}\rangle$; $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$.

Решение:

1. Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода– двухатомная, связь между атомами считаем жесткой. Тогда число степеней свободы молекулы водорода равно 5. В среднем на одну степень свободы приходится энергия

$$\langle\varepsilon_i\rangle = \frac{kT}{2},$$

где k–постоянная Больцмана;

T–термодинамическая температура.

2. Поступательному движению приписывается три (i=3), а вращательному (i=2) степеней свободы. Энергия одной молекулы

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle = \frac{3}{2}kT; \quad \langle\varepsilon_{вр}\rangle = \frac{2}{2}kT.$$

3. Число молекул, содержащихся в массе газа,

$$N = \nu\cdot N_A = \frac{m}{\mu}N_A,$$

где ν–число молей;

N_A–постоянная Авогадро.

4. Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул водорода

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle = \frac{m}{\mu}N_A\cdot\frac{3}{2}\cdot kT = \frac{3}{2}\cdot\frac{m}{\mu}RT, \qquad (8.1.1)$$

где $R=kN_A$–молярная газовая постоянная.

5. Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\langle\varepsilon_{вр}\rangle = \frac{m}{\mu}RT \qquad (8.1.2)$$

6. Подставляя числовые значения в формулы (8.1.1) и (8.1.2), имеем

$$\langle \varepsilon_{пост} \rangle = \frac{3 \cdot 2\ кг \cdot 8{,}31\ Дж/(моль \cdot К) \cdot 400\ К}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ кг/моль} = 49{,}86 \cdot 10^5\ Дж = 4985\ кДж.$$

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = \frac{2\ кг \cdot 8{,}31\ Дж/(моль \cdot К) \cdot 400\ К}{2 \cdot 10^{-3}\ кг/моль} = 33{,}24 \cdot 10^5\ Дж = 3324\ кДж.$$

Ответ: $<\varepsilon_{пост}>$=4986 кДж, $<\varepsilon_{вр}>$=2324 кДж.

Пример 8.2:

Кислород массой 160 г нагревают при постоянном давлении от 320 К до 340 К. Определите количество теплоты, поглощенное газом, изменение внутренней энергии и работу расширения газа.

Дано: $m=160\ г=16 \cdot 10^{-2}\ кг.$

Найти: $Q;\ \Delta U;\ A.$

Решение:

1. Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении,

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_p(T_2 - T_1). \tag{8.2.1}$$

Здесь c_p и $C_p=\mu \cdot c_p$–удельная и молярная теплоемкости газа при постоянном давлении;

$\mu=32 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$–молярная масса кислорода. Для всех двух атомных газов

$$C_p = \frac{7}{2}R;\ C_v = 2.5 \cdot 8.31\ Дж/(моль \cdot К) = 20{,}8\ Дж/(моль \cdot К).$$

2. Работа расширения газа при изобарном процессе $A = p \cdot \Delta V$, где $\Delta V = V_2 - V_1$–изменение объема газа, которое можно найти из уравнения Клапейрона–Менделеева. При изобарном процессе

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \tag{8.2.2}$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \tag{8.2.3}$$

Почленным вычитанием выражения (8.2.1) из (8.2.2) находим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$$

следовательно,

$$\text{A} = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \tag{8.2.3}$$

Подставляя числовые значения в формулы (8.1.1), (8.2.2) и (8.2.3), получаем:

$$Q = \frac{16 \cdot 10^{-2} \ кг}{32 \cdot 10^{-3} \ кг / моль} \cdot 29 \frac{Дж}{моль \cdot K} (340 \ K - 320 \ K) = 2900 \ Дж;$$

$$\Delta U = \frac{16 \cdot 10^{-2} \ кг}{32 \cdot 10^{-3} \ кг / моль} \cdot 20{,}8 \frac{Дж}{моль \cdot K} (340 \ K - 320 \ K) = 2080 \ Дж;$$

$$\text{A} = \frac{16 \cdot 10^{-2} \ кг}{32 \cdot 10^{-3} \ кг / моль} \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot K} (340 \ K - 320 \ K) = 840 \ Дж.$$

Ответ: *Q=2900 Дж; ΔU=2080 Дж; A=840 Дж.*

Пример 8.3:

Объем аргона, находящегося при давлении 80 кПа, увеличился от 1 до 2 л. На сколько изменится внутренняя энергия газа, если расширение производилось: а) изобарно; б) адиабатно.

Дано: $V_1=10^{-3}$ *м*^{3}; $V_2=2\cdot10^{-3}$ *м*^{3}; $p=0{,}8\cdot10^5$ *Па*; $\mu=40\cdot10^{-3}$ *кг/моль*; $i=3$.

Найти: *ΔU.*

Решение:

1. Применим первый закон термодинамики. Согласно этому закону, количество теплоты, переданное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии *ΔU* и на внешнюю механическую работу А:

$$Q = \Delta U + A. \tag{8.3.1}$$

2. Величину *ΔU* можно определить, зная массу газа *m*, удельную теплоемкость при постоянном объеме c_v и изменение температуры *ΔT*:

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T \tag{8.3.2}$$

3. Однако удобнее изменение внутренней энергии *ΔU* определять через молярную теплоемкость *Cv.*которая может быть выражена через число степеней свободы:

$$c_v = \frac{C_v}{\mu} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu} \tag{8.3.3}$$

5. Подставляя величину c_v из формулы (8.3.3) в (8.3.2), получаем

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T \qquad (8.3.4)$$

6. Изменение внутренней энергии зависит от характера процесса, при котором идет расширение газа. При изобарном расширении газа, согласно первому закону термодинамики, часть количества теплоты идет на изменение внутренней энергии ΔU, которая выражается формулой (8.3.4). Найти ΔU для аргона по формуле (8.3.4) нельзя, так как масса газа и температура в условии задачи не даны. Поэтому необходимо провести преобразование формулы (8.3.4).

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$$

или

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \qquad (8.3.5)$$

Подставив (8.3.5) в формулу (8.3.4), получим

$$\Delta U = \frac{i}{2} p(V_2 - V_1) \qquad (8.3.6)$$

Это уравнение является расчетным для определения ΔU при изобарном расширении.

7. При адиабатном расширении газа теплообмена с внешней средой не происходит, поэтому $Q=0$. Уравнение (8.3.1) запишется в виде

$$\Delta U + A = 0 \qquad (8.3.7)$$

Это соотношение устанавливает, что работа расширения газа может быть произведена за счет уменьшения внутренней энергии газа (знак минус перед ΔU):

$$A = -\Delta U \qquad (8.3.8)$$

Формула работы для адиабатного процесса имеет вид

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right], \qquad (8.3.9)$$

где γ–показатель степени адиабаты, равный отношению теплоемкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

Для аргона–одноатомного газа (i=3)–имеем γ=1,67.

8. Находим изменение внутренней энергии при адиабатном процессе для аргона, учитывая формулы (8.3.8) и (8.3.9):

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \quad (8.3.10)$$

9. Для определения работы расширения аргона формулу (8.3.10) следует преобразовать, учитывая при этом параметры, данные в условии задачи. Применив уравнение Клапейрона–Менделеева для данного случая

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$$

получим выражение для подсчета изменения внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]. \quad (8.3.11)$$

10. Подставляя числовые значения в (8.3.6) и (8.3.11), имеем:

а) при изобарном расширении

$$\Delta U = \frac{3}{2}0.8\cdot 10^5 \ Па\cdot 10^{-3} \ м^3 = 121 \ Дж;$$

б) при адиабатном расширении

$$\Delta U = \frac{0.8\cdot 10^5 \ Па\cdot 10^{-3} \ м^3}{(1,67-1)}\left[\left(\frac{10^{-3} \ м^3}{2\cdot 10^{-3} \ м^3}\right)^{1,67-1} - 1\right] = -44,6 \ Дж,$$

Ответ: а) *ΔU=121 Дж;* б) *ΔU=-44,6 Дж.*

Пример 8.4:

Температура нагревателя тепловой машины 500 К. температура холодильника 400 К. Определите кпд тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675 Дж теплоты.

Дано: *T=500 К;* T_0*=400 К; Q=1675 Дж.*

Найти: η, *N.*

Решение:

1. Коэффициент полезного действии машины определяется по формуле

$$\eta = \frac{(T - T_0)}{T} \tag{8.4.1}$$

$$\eta = \frac{A}{Q}. \tag{8.4.2}$$

2. Из выражений (8.4.2) и (8.4.1) находим

$$A = \eta \cdot Q = \frac{(T - T_0)}{T} \cdot Q.$$

3. Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{500\ K - 400\ K}{500\ K} = 0{,}2;$$

$$A = 0{,}2 \cdot 1675\ Дж = 335\ Дж.$$

Эта работа совершается за 1 с, следовательно, полная мощность машины 335 Вт.

Ответ: η=0,2; N=335 Вт.

8.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Определите среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы аргона , азота и углекислого газа при температуре 600 К. *(Ответ:1,242*10^{-20} Дж; 2,07*10^{-20} Дж 4,71 м/с; 2,484*10^{-20} Дж)*

2. Кислород находится при температуре Т=500 К. Найдите среднюю кинетическую энергию $<w_{вр}>$ вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию $E_к$ всех молекул этого газа; количество кислорода ν=0,3 моль. *(Ответ: ; 1,725*10^{-20} Дж 3116,25 Дж)*

3. Определите относительную молекулярную массу M_r и молекулярную массу μ газа, если разность его удельных теплоемкостей $C_p - C_v$ = 2,08 кДж/(кг•К). *(Ответ: ; 4*10^{-3} кг\моль, 4)*

4. В сосуде объемом V=6 л находится при нормальных условиях двухатомны газ. Определите теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме. *(Ответ:5,56 Дж\К)*

5. Кислород массой m=200 г занимает объем V_1=100 л и находится под давлением p_1=200 кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема V_2=300 л, а затем его давление возросло до p_3=500 кПа

при неизменном объеме. Найдите изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную им работу А и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса. *(Ответ: 325 кДж; 40 кДж;365 кДж)*

6. Водород массой m=40 г, имевший температуру T=300 К, адиабатически расширился, увеличив объем в n_1=3 раза. Затем при изотермическом сжатии объем газа уменьшился в n_2=2 раза. Определите полную работу А, совершенную газом, и конечную температуру Т газа *(Ответ:22610 Дж)*

7. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества ν=0,4 моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит теплоту Q=800 кДж? Температура водорода T=300 К. *(Ответ:2,23)*

8. Азот массой m=0,1 кг был изобарически нагрет от температуры T_1=200 К до температуры T_2=400 К. Определите работу А, совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота. *(Ответ: 6 кДж; 21 кДж; 15 кДж)*

9. Газ, являясь рабочим веществом в цикле Карно, получил от нагревателя теплоту Q=4,38 кДж и совершил работу A=2,4 кДж. Определите температуру нагревателя, если температура охладителя T_2=273 К. *(Ответ:606 К)*

10. Газ, совершающий цикл Карно, отдал охладителю 67% теплоты, полученной от нагревателя. Определите температуру T_2, охладителя, если температура нагревателя T_1=430 К. *(Ответ:288 К)*

Домашняя контрольная работа №8

Вариант I

1. Давление идеального газа 10 мПа, концентрация молекул $8 \cdot 10^{10}$ $см^{-3}$. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы и температуру газа.
2. Определите среднюю кинетическую энергию <w> одной молекулы водяного пара при температуре T=500 К.
3. Определите молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости c_v=10,4 кДж/(кг•К) и c_p=14,6 кДж/(кг•К).
4. Во сколько раз увеличится объем 2 молей кислорода при изотермическом расширении при температуре 300 К, если при этом газу сообщили 4 кДж теплоты.

5. Тепловая машина работает по циклу Карно, к.п.д. которого 0,4. Каков будет кпд этой машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении?

Вариант II

1. Определите суммарную кинетическую энергию $E_к$ поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде объемом V=3 л под давлением p=540 кПа.

2. Определите среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы аргона и водяного пара при температуре 300 К.

3. Найдите удельные c_v и c_p и молярные C_p и C_v теплоемкости азота и гелия.

4. Во сколько раз увеличится объем 2 молей кислорода при изотермическом расширении при температуре 300 К, если при этом газу сообщили 4 кДж теплоты.

5. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу 1000 Дж. Температура нагревателя 500 К, температура холодильника 300 К. Определите количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

Вариант III

1. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа равна $15 \cdot 10^{-21}$ Дж. Концентрация молекул равна $9 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$. Определите давление газа.

2. При какой температуре средняя кинетическая энергия $<w_{пост}>$ поступательного движения молекул газа равна $4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Дж?

3. Вычислите удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей $C_p/C_v=1{,}67$.

4. Определите количество теплоты, сообщенное 88 г углекислого газа, если он был изобарически нагрет от 300 К до 350 К. Какую работу при этом может совершить газ и как изменится его внутренняя энергия?

5. В результате кругового процесса газ совершил работу А=1 Дж и передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 4{,}2$ Дж. Определить термический КПД η цикла.

Вариант IV

1. Определите среднюю кинетическую энергию $<\varepsilon_п>$ поступательного движения и среднее значение $<\varepsilon>$ полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре T=600 К. Найти также

кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества υ=1 кмоль.

2. Количество вещества гелия ν=1,5 моль, температура T=120 К. Определите суммарную кинетическую энергию E_k поступательного движения всех молекул этого газа.

3. Трехатомный газ под давлением p=240 кПа и температуре и температуре 20^o C занимает объем V=10 л. Определите теплоемкость C_p этого газа при постоянном давлении.

4. При каком процессе выгоднее производить расширение воздуха: изобарическом или изотермическом, если объем увеличивается в пять раз. Начальная температура газа в обоих случаях одинаковая.

5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_2 охладителя равна 290 К, Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от T_1=400 К до T_2=600 К?

Вариант V

1. Молярная внутренняя энергия U_μ некоторого двухатомного газа равна 6,02 кДж. Определите среднюю кинетическую энергию $<w_{вр}>$ вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

2. Определите среднее значение $<\varepsilon>$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре T=400 К.

3. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем V=5 л. Вычислите теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме.

4. При каком процессе выгоднее производить нагревание 2 молей аргона на 100 К: а) изобарическом; б) изохорическом.

5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты Q_1=42 кДж. Какую работу А совершил газ?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики [Текст]: учебное пособие / Т.И.Трофимова. – Изд. 4-е, испр. - М.: «Высшая школа», 2001. – 542 с.

2. Дмитриева, В.Ф. Основы физики [Текст]: учебное пособие / В.Ф.Дмитриева. – М.: «Высшая школа», 2001.

3. Зисман, Г.А. Курс общей физики, т. 1 [Текст]: учебное пособие / Г.А. Зисман, О.М.Тодес. – М.: «Наука», 1969. – 368 с.

4. Чертов, А.Г. Задачник по физике [Текст]: учебное пособие / А.Г. Чертов, А.А.Воробьев - М. «Высшая школа», 2007.-640.

5. Трофимова, Т.И. Сборник задач по физике с решениями [Текст]: учебное пособие / Т.И.Трофимова. – Изд. 4-е, испр. - М.: «Высшая школа», 2001. – 542 с.

6. Волькенштейн, Э. Сборник задач по физике [Текст]: учебное пособие / Э.Волькенштейн - М. «Высшая школа», 1975.

Светлана Михайловна Ожегова

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Практические занятия по физике
Часть 1

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 20.11.2013		
Формат 60x90 $^{1}/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд.л. 7,0
Рег.№ 29	Тираж 70 экз.	

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nfmisis@yandex.ru